

C. DIBVADII
IN
GEOMETRIAM EVCLIDIS

*prioribus sex Elementorum
libris comprehensam*

Demonstratio Linealis.

AD
CHRISTIANVM IV.
Serenissimum Daniae & Septentrionis Regem.



ARNHEMII GELDRIÆ,
Apud IOHANNEM IANSONIVM.

clō. lō. c. lll.

SERENISSIMO ET POTENTISSIMO
Principi

CHRISTIANO QVARTO

*Daniae, Norvegiae, Schlavorum & Gothorum Regi,
Duci in Schlesvick, Holsatia, Stormarn & Diet-
marschen, Comiti in Oldenburgo & Del-
menhorst, Hamburgensium
Protectori, &c.*

DOMINO SVO CLEMENTISSIMO.

Ex omnium artium & scientiarum generi-
bus, quæ misera mortalium sollicitudo, insi-
gni industria sollertique indagine effinxit,
nullum SERENISSIME REX Mathesi minus opinio-
num commentis involutum, nullum certioribus ratio-
nibus fultum, nullum quod maiori contemplantis ani-
mum iucunditate impleat, nullum quod foecundiores
in genus humanum Belli aut Pacis tempore fructus ef-
fundat, in hoc mundi Theatrum prodijt: ut consociata
Numinis proprietate signata illa ingenia credere fas sit,
quæ se primum talium tantarumque rerum meditationi,
immiscuerunt. Non ad id ostendendum verborum fucus
conquirendus, non Eloquentiae amplum flumen ape-
riendum: Experiuntur satis, potentissimi rerum Domini
& Principes, qui clauum reipublicæ tenent, quot quan-
taque Mathemata humano generi commoda adferant;
sive cum prata, agri, sylvæ, Iustitiæ limitæ circumdu-
cendæ sint; sive cum urbium structura, amœnitas, situs,
robur

Geometria

*Archite-
ctura.*

*Optica.
Perspecti-
ua.*

Fortalicia.

Hydrau-
lica.

Isoropica.

Argonau-
tica.

Tactica.

Astrono-
mia.

Astrologia.

In libro
qui inscri-
bitur DO-
NVM RE-
GIVM par-
te secunda
sub finem.

Artū & sciē-
tiarū medio-
crem gustum
non damno,
potissimum
Mathematū,
ob Scientiam
Militarem, in
castrametatio-
ne, cuneorum
ordinatione,
miniminū fa-
brica, torne-
torū directio-
ne, & similiū.
Nec harū in-
te cognitio o-
tiose absque
fructu inter-
quiescat, sed
ut Iohannes
de fide loqui-
tur, Cotidie
in omnibus
vitae tuae actio-
nibus efficiaci-
ter eluceat.

robur & vis examinanda; sive cum aquae subterraneo
rivo ad usum salubritatem aut jucunditatē aliquo de-
ducendae; sive cū immensa pondera loco suo movenda;
sive cum remotae terrae nostris jungendae; sive cum exer-
citus ordinate in acie disponendus; sive cū per assiduas
temporum vices, qui seculi infinita series sua lege festi-
net attendendum; sive cum tacitum illud cælum inter
terramque negociantis naturae detegendum commer-
cium; sive cum quicquam fere communis reipublicae
utilitatis causa sit suscipiendum. Ex arte itaque hac sum-
mam ad rempub. promanare utilitatem, tot æui huius
circa eam occupata Heroum satis convincit industria.
Italiae & Germaniae omnes fere Principes ac Duces eius
studio, animos suos excolunt & reficiunt. Amant eam
eiusque Professores, summi Orbis Reges & Monarchae.
Suffragio suo, publicoque testimonio [ut unum loco
omniū adducam] INVICTISSIMUS IACOBVS SEXTVS,
ANGLIAE, SCOTIAE & HYBERNIAE REX Affinis
S. R. M. T. charissimus eam approbavit, suoque filio
his verbis cōmendavit. *I graunt it is meete ye haue some
entrance, speciallie in te Mathematikes; for the knowledge of the
art militarie, in situation of Camps, ordering of battels, making
fortifications, placing of batteries, or such like. And let not this
your knowlege bee dead without frutes, as S. Iohn speaketh of
faith: but let it appeare in your daily conuersation, and in all
the actions of your life.* Naturae quodam impetu subli-
mem quoque animū R. M. T. ad Mathematicum ferri
studiū, nova vrbis Hafniensis Daniae Metropolis facies
in Arce, Academia, Moenibus coeterisq; suis Ornamentis,
haut

haut occulte innuit, ut de ea proferri possit quod olim
denat^o Augusto de Roma, urbem CHRISTIANVS IV.
quam ligneam & stramineam offendit, latericeam &
marmoream reliquit. Tuæ itaque Maiestati SERENIS-
SIME REX Commentariū hunc qualemcunq; meum
in EVCLIDEM auctorem vetustissimum, qui omnia
Matheseos Elementa & principia [sine quorum exacta
perceptione, omnis in arte hac superfluous labor] in unū
cōgessit, dedicare volui, ut submissi animi mei, de *Patriæ*
tanta nostræ per optimū *Principem* felicitate, atq; R. M.
T. iam accessu novæ prolis, adaucti in Hambugenses
imperij, Affinisque R. M. T. Charissimi ad summā in
Orbe potentiā euesti, tantopere locupletata, quasque ad
culmen perducta beatitudine, gratulationē publico te-
stimonio proderē; Tuæque R. M. conatibus quantū in
me erat humilime inservirem, atq; fauorabilem Maie-
statis auram, gratæ voluntatis significatione, ulterius in
me deducerem: cuius si me suaves benignique halitus
refecerint, vires ad maiora utilioraq; tentanda, dabunt.
Summus ille auctor & conditor rerum DEVS trinus &
unus, qui Regum corda moderatur, qui gubernationes
felices efficere solus potest, qui sapientiā per quā Reges
regnant largitur, nobis M. T. quā diutissime superstitē
florentemq; cum dulcissima Regina tua & nuper nato
Rege, tranquillitate publica cōservet. Vale ō REX SE-
RENIS SIME. Lugduni Batavorum, Kal. Novembris,
Anno Salutis cIo. DC. III.

R. M. T. ST.

CHRISTOPHORVS DIBVADIVS,
Doctor Medicus & Mathematicus.

IANI DOVSÆ,

Nordovici & Cattendyckij toparchæ, summi apud Batavos Con-
siliij assessoris; magni Archivorum & Feudorum præfecti,
& Illustris Academiæ apud Batavos Curatoris,

In C.V. C. DIBVADII, Doctoris Medicinæ & Matheseos,
demonstrationem Linealem.

A VCTORES mundi numeros occultaque rerum,
Et Archimedis sacra queis IANVS meus
Celo prælusit & astris
Nouus futurus indiges,
Aucturusque Deum numeros, turbamque beatam,
Polumque magnum, mentem quem vidit prius,
Sacri Chironis alumnus,
Nec unius DIBVADIUS
Rhebi dulcis honos, facilem deduxit in orbem,
Addensque plura pauciora reddidit.
Nunc sacro percitus æstro,
Et debiti voti reus,
Quæ conclusa diu, terrisque ignota iacebant,
Nec expiando forsitan silentio,
Longisque abitura tenebris,
Aut temporis contagio,
Mnemosynes locat in gremio, testesque Camænas,
Et obstetricem voce Lugdunum ciens,
Regi donabit & orbi
Magni futuram nominis
Progeniem, partumque haud uno vate canendum:
Quos inter ecce DOVSICVM præconium,
Et laudi nata Camæna,
Vicem Leuana præstitit.

In demon-

In demonstrationem Linealem
Cl. V. CHRISTOPHORI DIBVADII
Dani, Medicinæ Doctoris, & Matheſeos.

FELICES operum, qui cœli pendula templa,
Causasque pronis destinatas ignibus,
Submisere animis, æquataque pondera terræ
Suspenda castis patris in complexibus
Ætheris, & justo libratum examine pontum.
Et architectum mente prægressi Deum
Excessere hominum curas, & præmia vulgi,
Finesque rerum, sordidosque limites.
Non illos Acheron, ignavaque janua lethi,
Nec ora centum terruere Cerberi,
Nec tristes Furiaë, larvataque nomina Manes,
Nec fabulosæ Parca vox potentiaë.
Pæcepere Deos animis, & fata sequendo
Necessitatis institere semitam,
Liberaque incertos mens dedignata labores,
Opinionum vana per contagia,
Anfractusque sequi, toti se surripit orbi,
Et certitates ipsa metitur suas.
Nos tua Dibjadi vestigia pone secuti
Trophæa tantis destinamus ausibus,
Nec dulcis choreæ, nec carminis inscia turba:
Septentrionem sæpe dicturi tuum,
Vicinamque Helicen, & non tractabile cœlum.
Tu sibilantis colla livoris preme
Degeneremque hydram: sic indignante noverca
Nunc ipse cœlum magnus Alcides tenet.

DANIEL HEINSIUS,
Græcorum & Latinorum Poëtarum interpretes.

Ad Clariss. D.D. CHRISTOPHORVM DIBVADIVM Zelando - Danum
Medicum ac Mathematicum EVCLIDEM felicibus
auspicijs illustrantem.

Si flammam rapuit cœlesti ex arce promethæus
Si phæben cœlis abstulit Endymion.
Posteritas credet DIBVADIVM & palladis arte
Ac phæbi æthereâ surripuisse domo;
Quæ, secreta, aperit, tenebrarum nube soluta,
EVCLIDIS, nullo tempore visa prius.
Extant multorum fateor, docta ἱερωσύνη, verum
Ernit his nemo, mystica sensu viri.
Detegit hæc primus DIBVADIVS Apolline doctus
DANORVM splendor, pegasidumque decus.
Mirando ingenij & felicitis acumine pandit
Quid NUMERVS valeat, LINEA quidve potest.
Addit inauditam tenebris mens enthea Lucem
Dum solidâ obscuros, explicat arte locos.
Sunt igitur digni, DIBVADI laude labores,
Hanc etenim solus cur mereatur habet.

LYDOLPHVS POTTERVS Groeningensis,
I.V. Doctor, ætate Septuagenarius.

LECTORI S.

AB EVCLIDIS lectione, ampla Commentationum Volumina, etsi doctissima, plurimos deterruerunt. Nos vero benigne lector utilitati tuæ non gloria nostra consulentes, ne temporis aut pecuniæ iacturam faceres, plano breuique commentario auctoris mentem aperuimus, in quo hæc tibi observanda. Cum duo latera [ut prop. 4. lib. 1.] CB, bd duobus lateribus DE, ef æquantur, intelligendum CB & DE inter se equalia esse, & bd, ef, inter se æuari. Deinde in citatione propositionum, cum alius numerus additur, ut prop. 4. 1. posterior librum, prior propositionem denotat, Si posterior numerus non addatur, scias in eodem libro quem legis propositionem reperiri. Hæc sunt de quibus te monendum in Vestibulo duxi, si gratus tibi noster labor fuerit, reliquos EVCLIDIS libros, simili commentario illustratos, aliquando dabimus. Vale: hæcque menda priusquam legas emenda.

Folio 6 Paragrapho 2. CCF lege CDF. p. 11. BD, EC. l. BC, ED. f. 7. p. 1. l. minorem p. 12. ut basis l. ut & basis. f. 10. p. 20 l. demonstrabis. f. 17. p. 7. DML. l. EML. f. 19. p. 20. per 3. l. per 35. f. 20. p. 17. l. parallela. f. 23. p. 9. CBD. l. CDE. p. 11. CEF. l. CBD. f. 25. p. 25. l. habeant. f. 28. p. 29. post BN æquale. l. est autem & DL eidem BN æquale. f. 29. p. 19. quare & l. eo quod p. 27. DC. l. BC. f. 31. p. 6. qui cum l. & DFB, DFC. f. 41. p. 27. FH l. EH. f. 42. p. 27. CE l. CF. p. 28. DF l. DE. p. 29. EC, FD l. FC, ED. f. 46. p. 26. & l. ut. p. 27. l. ducantur CID, CF. f. 47. p. 2. simplex ICF l. simplex ICE. f. 48. p. 13. l. puncto. f. 53. p. 19. l. rectangulum cum quadrato de IA. f. 60. p. 25. l. semirectus est, & ad basin anguli recti f. 63. p. 12. l. recta. f. 64. p. 2. DIC. l. EIC. f. 73. p. 2. BC. l. BD. f. 82. p. 31. AB l. CB. prop. 13. lib. 6. ubicunque A ponitur, lege H & vbi C, l. G. f. 87. p. 28. DC. l. BC. l. 93. p. 25. ad AF. l. CF.

EVCLIDIS

EVCLIDIS ELEMENTORVM PRIMVS.

Doctrinam triangulorum planorum, hoc libro auctor persequitur, idque via varia; angulos & latera aliquando inter se conferendo, aliquando vero seorsim examinando. Deinde parallelorum proprietates aperit; Postremo parallelogrammorum contemplationem aggreditur, idque via eadem, qua superius in triangulis usus erat. Definitiones vero vocum præmittit, ne diversa earum acceptio, iuniorem Mathematicum perturbet.

DEFINITIONES.

1. *Punctum est, cuius pars nulla est.*
2. *Linea est, longitudo, latitudinis expers.*
3. *Lineæ termini sunt puncta.*
4. *Recta est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.*
5. *Superficies est, quæ longitudinem latitudinemq; tantum habet.*
6. *Superficie extremæ lineæ sunt.*
7. *Plana superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.*
8. *Planus angulus est, duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.*
9. *Rectilineus angulus appellatur cum quæ angulum continent lineæ, rectæ fuerint.*
10. *Cum recta super rectam consistens, eos qui sunt deinceps angulos æquales inter se fecerit, rectus est uterque æqualium angulorum, & quæ insistit recta, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.*
11. *Obtusus angulus est, qui recto maior est.*
12. *Acutus, qui minor est recto.*
13. *Terminus est quod alicuius extremum est.*

14. Figura est, quæ sub aliquo vel aliquibus terminis continetur.
15. Circulus, est figura plana, sub una linea comprehensa, quæ Peripheria appellatur, ad quam ab uno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ æquales sunt.
16. Hoc vero punctum centrum circuli appellatur.
17. Diameter est recta per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriâ terminata, quæ circulū æquibisecat.
18. Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.
19. Segmentum circuli est figura, quæ sub recta & circuli peripheria continetur.
20. Rectilineæ figuræ, quæ sub rectis continentur.
21. Trilateræ, quæ sub tribus.
22. Quadrilateræ, quæ sub quatuor.
23. Multilateræ, quæ sub pluribus quam quatuor.
24. Trilaterarum figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.
25. Isosceles, quod duo tantum æqualia habet latera.
26. Scalenum, quod tria inæqualia habet latera.
27. Rectangulum est, quod rectum angulum habet.
28. Ambligonium, quod obtusum angulum.
29. Oxigonium, quod tres acutos angulos habet.
30. Quadrilaterarum figurarum Quadratum est, quod æquilaterum & rectangulum est.
31. Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.
32. Rhombus, quæ æquilatera, sed rectangula non est.
33. Rhomboid-

- 3
33. Rhomboides, quæ adversa & latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.
34. Præter has, reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia appellatur.
35. Parallele, rectæ lineæ sunt, quæ cum eodem sunt plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

POSTULATA.

1. Postulatur, ut à quovis puncto in quodvis punctum, rectam ducere concedatur.
2. Rectam terminatam, in continuum rectam producere.
3. E quovis centro & intervallo circulum describere.

AXIOMATA.

1. Quæ eidem æqualia, & inter se sunt æqualia.
2. Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.
3. Si æqualibus æqualia auferantur, relinquuntur æqualia.
4. Si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.
5. Si inæqualibus æqualia auferantur, relinquuntur inæqualia.
6. Quæ eiusdem dupla sunt, inter se sunt æqualia.
7. Quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt.
8. Quæ sibi mutuo congruunt, inter se sunt æqualia.
9. Totum, sua parte maius est.
10. Omnes recti anguli, inter se sunt æquales.
11. Si in duas rectas, altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos, duobus rectis minores fecerit; duæ illæ rectæ in infinitum protractæ, sibi mutuo incidunt, ad eas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores. Duæ rectæ spatium [seu superficiem] non comprehendunt.

PROPOSITIO PRIMA.

*Super data recta terminata triangulum æquilaterum
constituere.*



Data sit BD è cuius puncto B, intervallo B D circulus describatur *per 3. post.* Et ex opposito puncto D, intervallo eodem alius circulus describatur. Erunt ergo circuli illi æquales. Puncto intersectionis C, lineis CB. CD *per 1. post.* ductis, BC æquabitur BD, cui & CD æqualis erit *per 15. def.* Erunt ergo *per 1. axiom.* CB. CD inter se æquales, & triangulum BCD. æquilaterum, quod erat faciendum.

PROP. II.

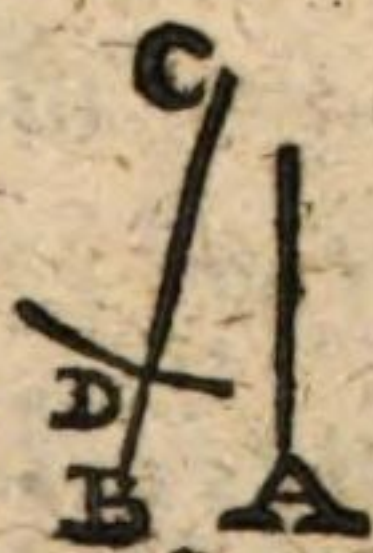
*Ad datum punctum datæ rectæ, æqualem
rectam ponere.*



Punctum datum B sit, recta A: centro B circulus CD, intervallo BC, æquali A describatur *per 3. post.* ductæ BC. BD *per 1. post.* æquales erunt *ex 15. defin.* Atqui intervallum CB *ex constructione*, æquale est rectæ A: erunt ergo A & BD *per 1. axiom.* inter se æquales. Ex dato ergo puncto B æqualem rectam BD posuimus.

PROP. III.

Duabus datis rectis inæqualibus, de maiore, æqualem minori rectam auferre.

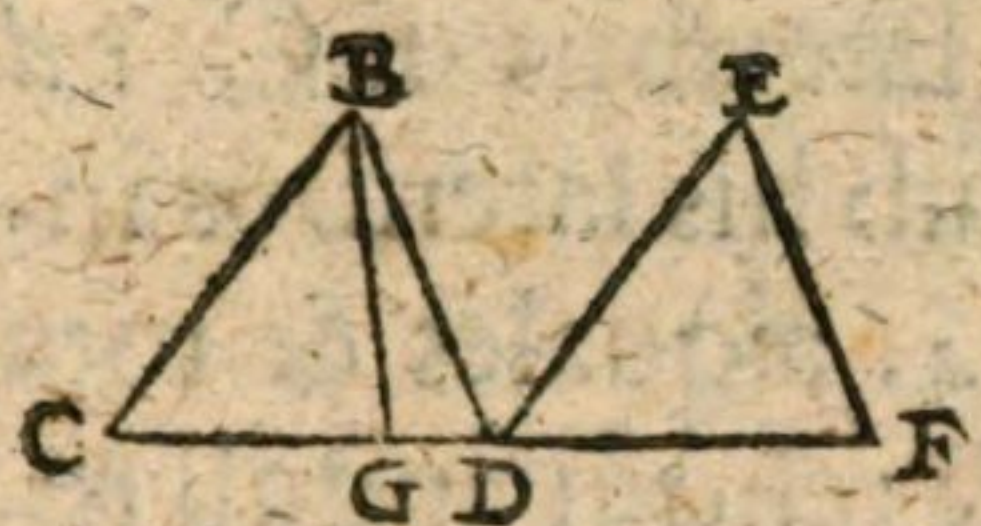


Maior sit BC minor A; centro C. intervallo CD æquali A, secatur BC in puncto D *per præcedentem.* erit ergo DC æqualis A. *per 15. defin.*

PROP.

PROP. IV.

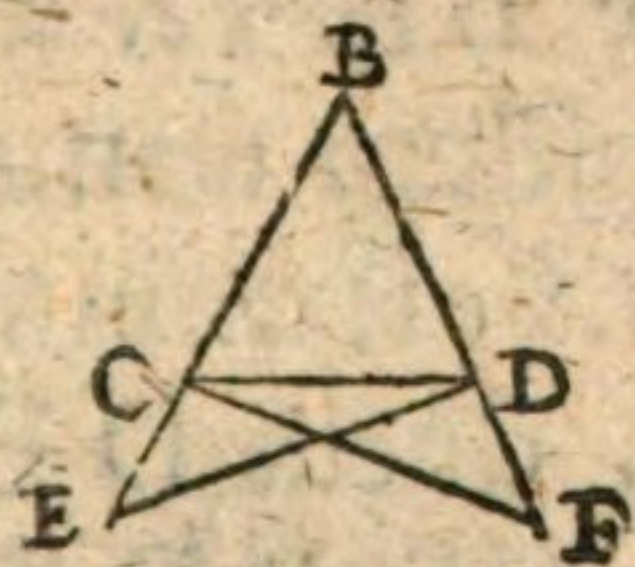
Si duo triangula duo latera duobus lateribus equalia habuerint, utrumque utrique, habeant vero & angulum angulo equalem, sub equalibus rectis contentum, & basin basi equalem habebunt, eritq; triangulum triangulo equale, ac reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, utrumque utrique, sub quibus equalia latera subtenduntur.



Sint latera BC, bd lateribus DE, ef equalia & angulus CBD angulo E . Si basis CD basi DF maior fuerit, reddatur æqualis minori per 3. & sit CG , ducaturq; BG . Si duo latera CB, bg duobus lateribus DE, ef existimentur equalia, & basis CG , basi DF ; angulus CBG non erit æqualis DEF , cum abscissus sit GBD , quod est contra hypothefin. Sunt ergo bases æquales, & anguli C, bdc , angulis EDF, f .

PROP. V.

Isofelium triangulorum qui ad basin sunt anguli, inter se sunt æquales; & productis equalibus rectis, qui sub basi sunt anguli, inter se æquales erunt.



Trianguli Isofelij laterib. BC, BD æquali intervallo extensis ad E & F puncta, lineæ ED, FC ducantur. Quoniam latera BE, bd laterib. BF, bc per constructionem æquantur, & angulum B habeant communem, bases quoque ED, FC inter se æquales erunt per 4. & angulus E angulo F ; & EDB , angulo FCB ; & EDC , angulo $FC D$. Sed si CDE, DCF auferantur, relinquuntur per 3. axiom. BCD, BDC . ad basin anguli æquales. Rursus CE, ed latera, DF, fc lateribus æquantur & E & F anguli ut antea ostensum est.

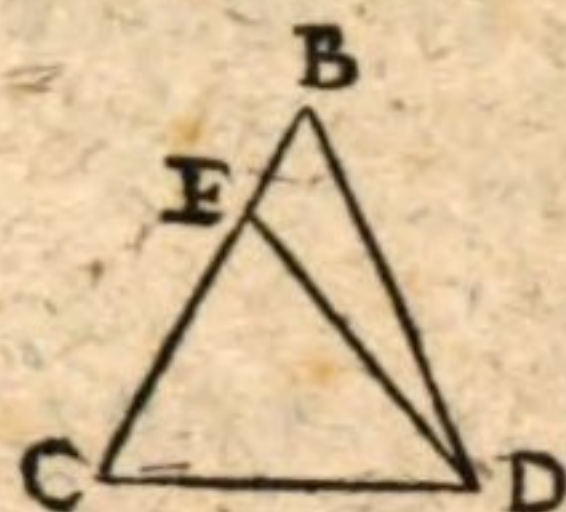
A 3

Ergo

Ergo & bases, cum reliquis angulis. Constat ergo liquido DCE. DCF sub basi angulos æquales esse.

PROP. VI.

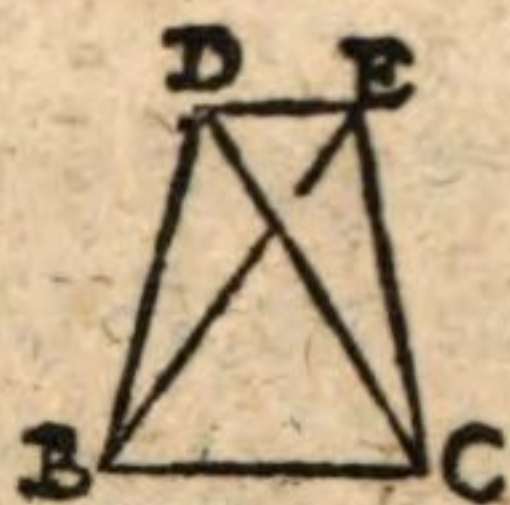
Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint, & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.



Sint anguli $\angle BDC$ æquales; si latera æqualia non fuerint, abscindatur ex BC. majore per 3. CE æquale BD recta ducta ED. Quoniam igitur duo latera BD & CE duobus lateribus EC. & ED æquantur, sunt autem & anguli sub his lateribus inter se æquales, erunt bases BD. EC per 4. æquales & tota triangula BCD. ECD inter se æqualia, & reliqui anguli reliquis angulis, pars & totum, quod est impossibile. Non ergo latera BC. BD inæqualia erunt.

PROP. VII.

Super eadem recta, duabus eisdem rectis, alie due rectæ æquales, utraque utrique, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes; eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis habentes.

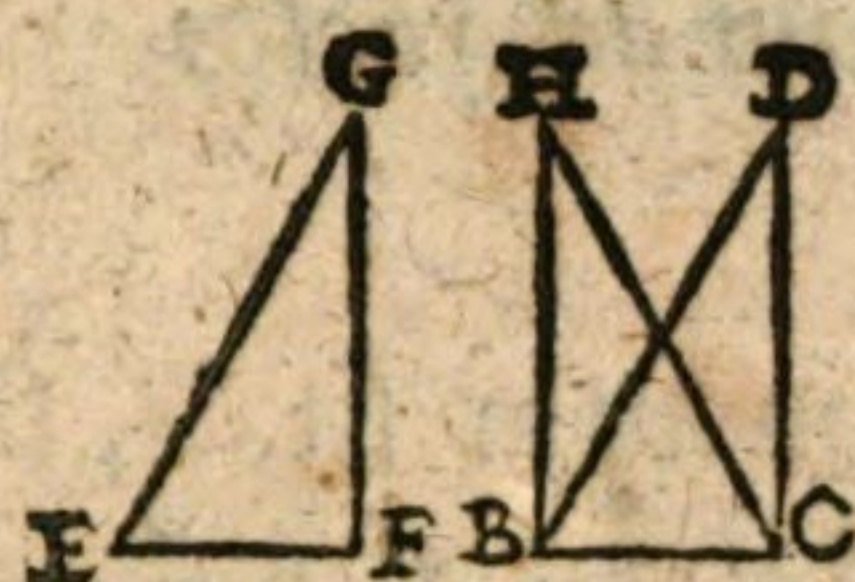


Super recta BC ad eandem partem superiorem duabus rectis BD. & CE. alie rectæ BE. & CD. æquales [si fieri potest] erigantur, eosdem terminos possidentes, hoc est rectarum BD. & CE terminus B erit & CD CE, terminus C. ducta DE. Cum igitur, BD. BE. latera æqualia sint, anguli BDE. BED super basi DE per 5. æquales erunt; ac proinde cum BED angulus CED angulo minor sit per 9. axiom. erit & BDE eodem CED minor. Quare adhuc minorem CDE angulus erit, pars BDE anguli eodem CED angulo. Rursus cum CE. CD. æquales sint, anguli ad basin DE æquales erunt.

erunt. Sed CDE angulum CED . angulo maiorem multo esse ostendimus. Idem ergo CDE , & minor & æqualis est CED angulo, quod absurdum est. Non ergo BD . BE inter se æquales sunt, nec CD . CE .

PROP. VIII.

Si duo triangula duo latera, duobus lateribus utrumque utrique æqualia habuerint, & basin basi æqualem; angulum quoque sub æqualibus rectis contentum æqualem habebunt.



Quod si res se non ita habeat: duorum triangulorum GEF . DBC . latera lateribus æqualia sint ut basis basi, anguli vero G & D . inæquales, super basin BC aliud triangulum erigatur cuius HB . hc latera, ge . GF lateribus æqualia sint, & H angulus G angulo. Erit ergo CH æqualis CD &, BH . BD . *contra* 7. & reliqui anguli, reliquis angulis *per* 4. hoc vero falsum est, cum HCB . angulus. pars sit DCB anguli.

PROP. IX.

Datum angulum rectilineum æquibisecare
[hoc est, bifariam secare.]

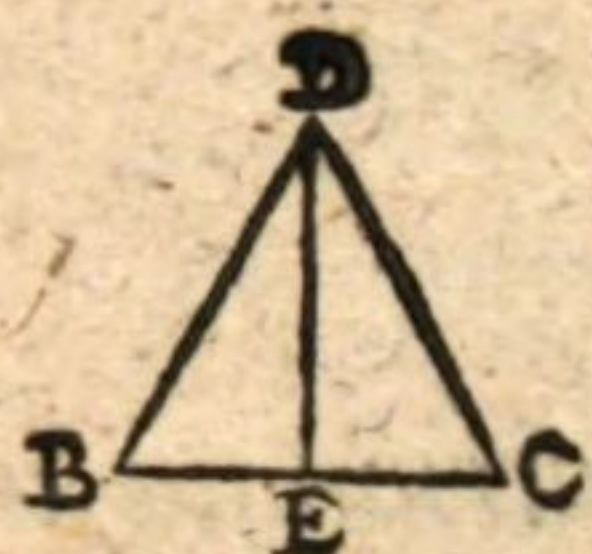


Datus angulus B sit, rectis BC bd , æquales BE bf abscindantur, & connectantur recta EF , super quam triangulum EGF æquilaterum *per*. 1. erigatur, ducta BG angulum æquifecat. Nam latera FB bg lateribus EB bg æquantur, ut & bases GF . GE inter se. Ergo FBG angulus, EBG angulo æquabitur *per*. 8.

PROP.

PROP. X.

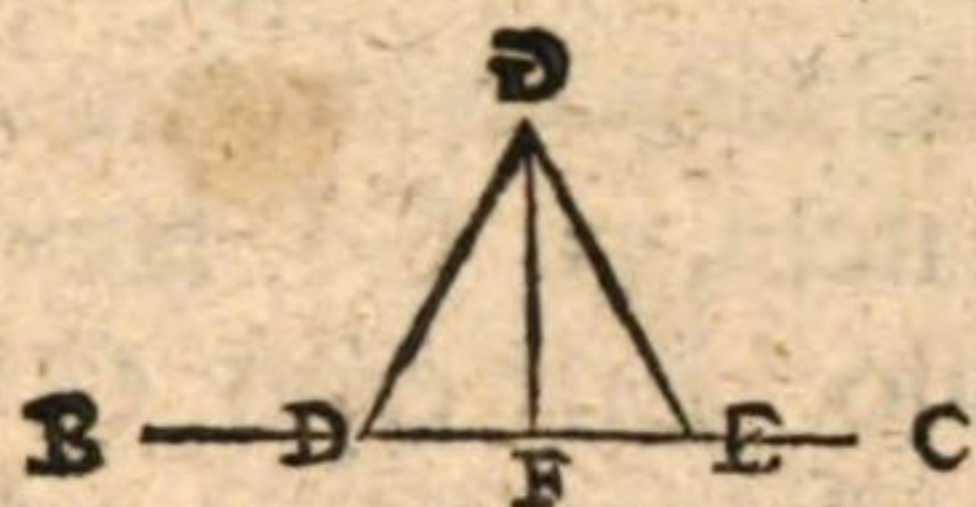
Datam rectam finitam æquibisecare.



Super recta finita B C. triangulum æquilaterum *per* 1. erigatur, cuius D angulus *per* 9. recta DE æquibisecetur. Cum igitur DB. *de*, lateribus DC. *de* æquentur, & angulus eisdem contentus lateribus angulo; bases quoque BE. EC. *per* 4. æquabuntur.

PROP. XI.

Data recta, à puncto in ea dato, rectam ad rectos angulos erigere.



In recta B C datum punctum sit F, sumatur F D æqualis F E *per* 3. *post.* super D E triangulum æquilaterum *per* 1. ponatur, ducta F G perpendicularis erit. Quia enim latera D F. *d* g lateribus F E *e* g æquantur *per* constructionem, anguli dictis lateribus contenti æquales erunt *per* 8. quare dicetur uterque rectus *per* 10. *def.*

PROP. XII.

Super datam rectam infinitam, à dato puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.



Puncto dato D, extra rectam infinitam B.C. quolibet intervallo circulus ducatur, qui datam rectam, in punctis quibuscumque F & G, secet; ducantur F D, G D, & angulus D *ex* 9. *per* D E recta æquibisecetur. Quoniam F E, *e* d; æquantur E G, *e* d, *ex* constructione, & bases D F, D G, *per* 15. *def.* anguli quoque D E F, D E G, *per* 8. æquabuntur. Erit ergo uterque angulus rectus, & linea D E perpendicularis *per* 10. *def.*

PROP.

PROP. XIII.

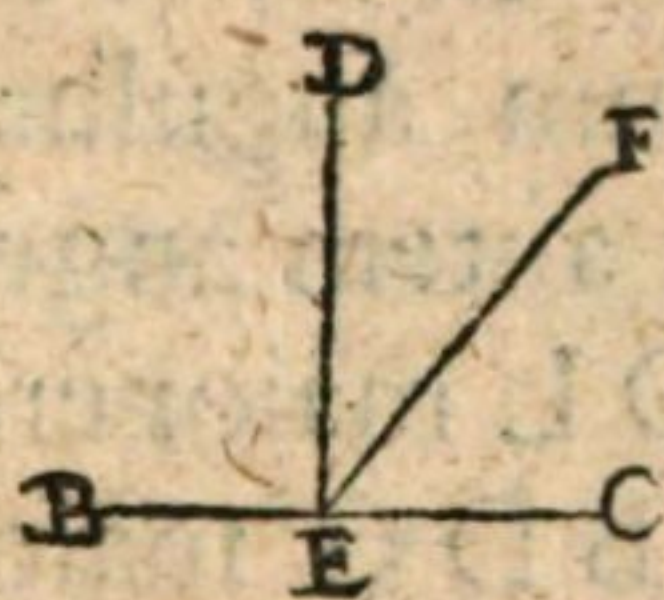
Cum recta rectæ insistens, angulos facit; aut duos rectos, aut duobus rectis æquales, efficiet.



Recta FE. rectæ BC. insistens, angulos FE C, FEB, faciat: si FE, perpendicularis fuerit ad BC, erunt dicti anguli, duo recti *per 10. defin.* si non recti sint, erigatur puncto E perpendicularis ED, *per 11.* Iam cum tres anguli BED, DEF, FEC æquentur duobus rectis, etiam compositus angulus DEC, & simplex DEB duobus rectis æquales erunt: siquidem excessus unius, diminutio est alterius.

PROP. XIV.

Si ad aliquam rectam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ non ad easdem partes ductæ, eos qui sunt deinceps angulos, duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ.

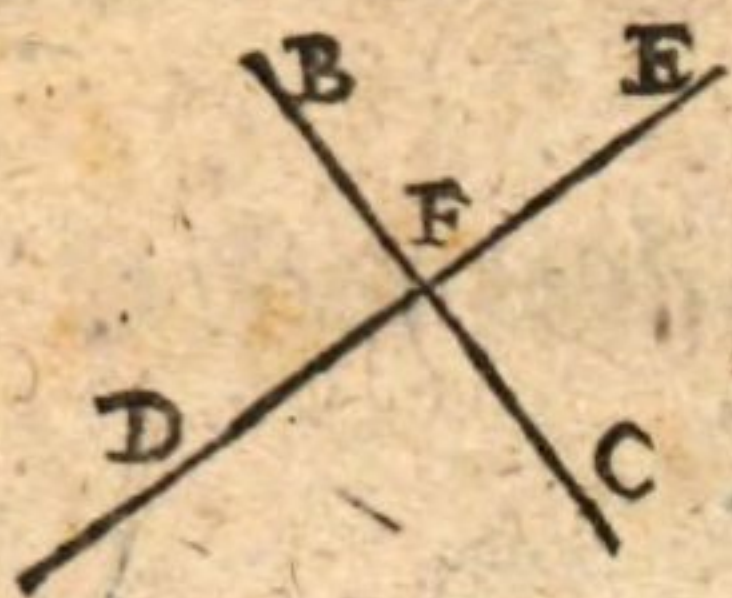


Ad punctum E linæ DE in diversas partes eductæ rectæ BE, EC efficientes angulos deinceps BED, DEC duos rectos, aut duobus rectis æquales; erunt duæ illæ rectæ in directum constitutæ, ita ut BEC sit una linea recta. Si non; sit EF in directum posita cum BE, erunt *per 13.* BED, DEF anguli, duobus rectis æquales. Sed minores sunt, ob angulum FEC qui deficit, *contra 10. axiom.* omnes enim recti anguli inter se sunt æquales. Non ergo FE directæ est cum EB.

PROP. XV.

Si duæ rectæ se mutuò interfecent; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

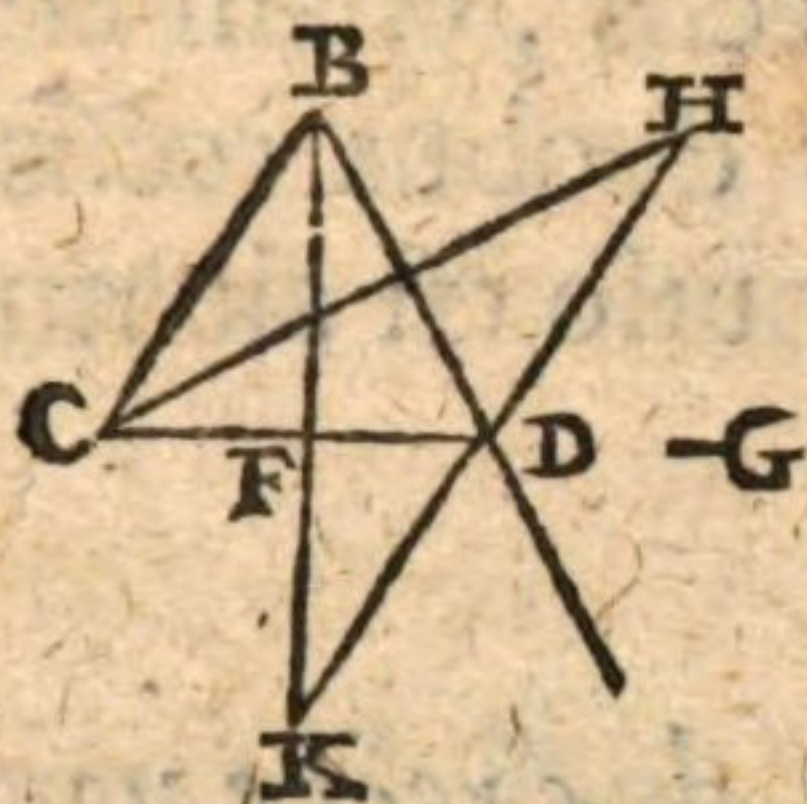
Quoniam BFE, BFD anguli, duobus rectis æquantur
B *per 13.*



per 13, ut & BFD, DFC anguli, per eandem: communi BFD ablato, remanebunt per 3. axiom. BFE, DFC æquales inter se. Sic quoque demonstrabitur angulos BFD, EFC inter se æquales esse.

PROP. XVI.

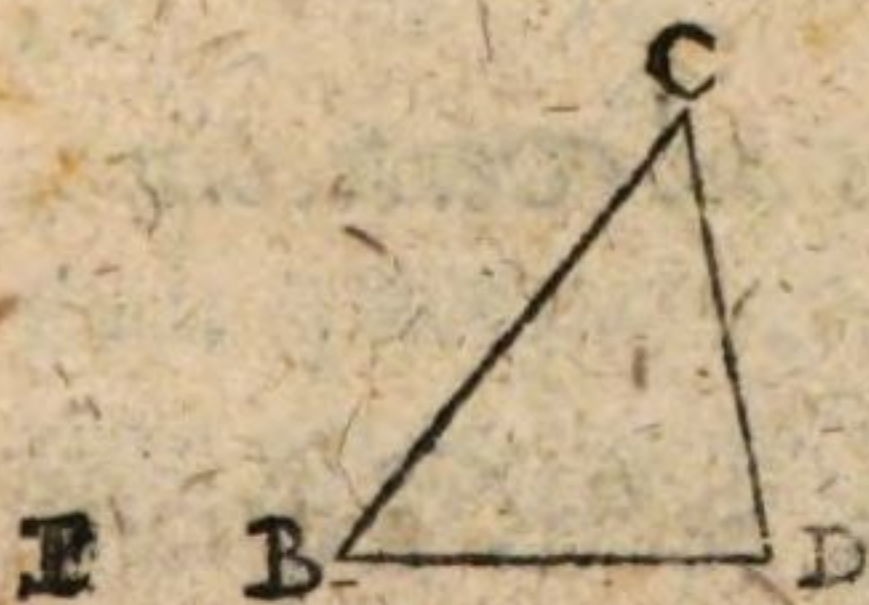
Cuiuscunque trianguli uno latere producto; externus angulus, utrolibet interno & opposito, maior est.



Extendatur latus CD in G æquibifecto BD per 10; ex C per E recta CEH extendatur, ita ut EH æqualis sit CE, ducaturq; HD. Quoniam latera CE *e b*, lateribus HE *e d* æquantur per constructionem; sunt autem anguli ad E dictis lateribus contenti inter se æquales ex 15; erit per 4. basis CB basi HD æqualis, & angulus CBE angulo EDH. sed externus BDG angulus, EDH maior est, totus nempe parte. igitur & externus angulus, maior erit interno & opposito CBD. Similiter extensa BD in L, & æquibifecta CD, &c. demonstrabitur externum angulum CDL, interno & opposito maiorem esse. Est autem angulus BDG, æqualis CDL per 15. igitur & CDL maior erit interno & opposito CBD. Est autem idem BDG maior quoq; ostensus angulo interno & opposito CBD. cuiuscunque igitur, &c.

PROP. XVII.

Cuiuscunque trianguli duo anguli, duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

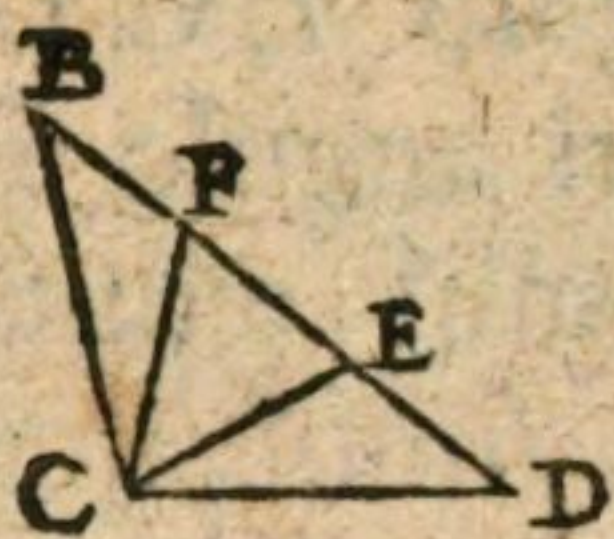


Producatur BD ad E. quoniam per 16. CBE interno & opposito angulo D maior est; si communis angulus CBD addatur, erunt duo anguli CBE, CBD maiores

maiores duobus angulis CBD, CDB per 4. axio. sed CBE, CBD per 13. duobus rectis æquales sunt. igitur CBD, CDB minores sunt duobus rectis. Eadem est de reliquis singulis binis angulis, simul sumptis, demonstratio. cuiuscunq; ergo, &c.

PROP. XVIII.

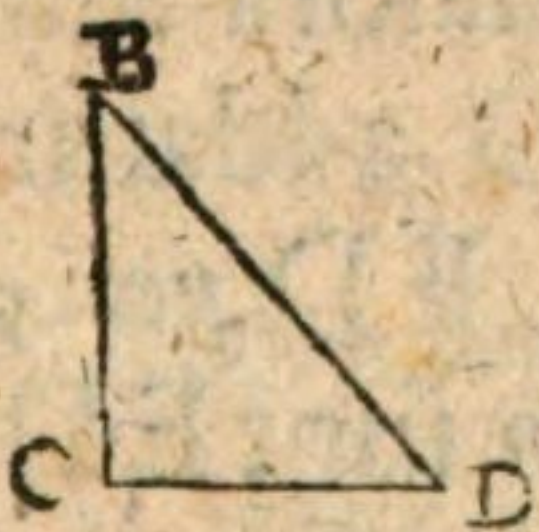
Omnis tri anguli maius latus, maiorem angulum subtendit.



Maius latus sit BD . erit ergo angulus C angulo D maior. si non; per 3 de BD auferatur BE , æqualis BC : quoniam latera æqualia sunt, erunt per 5. anguli super basin CE æquales. Est autem BEC angulus EDC maior per 16. igitur & angulus BCE , maior BDC angulo erit: quamobrem, cum angulus totus BCD maior adhuc sit BCE angulo per 9. axiom. erit BCD angulus multo maior BDC angulo. Eadem est demonstratio de B angulo.

PROP. XIX.

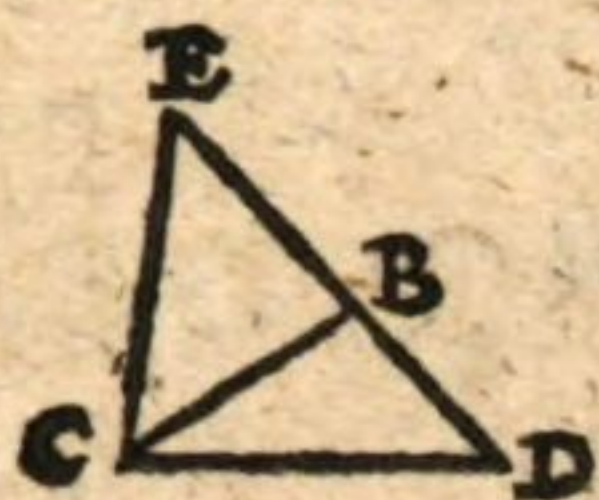
Omnis trianguli maior angulus, maiori lateri subtenditur.



Sit C angulus maior. Si BD maius latus non sit, aut æquale erit cum BC , aut minus. Si æquale, per 5 D & C anguli æquales erunt. Est autem C per hypothesin maior, ergo maior & minor æquales erunt, quod absurdum est. Si minus dicatur quàm BC , erit C angulus minor quam D , cum minus latus maiorem angulum subtendat ex præcedenti: ponitur autem maior quod magis est absurdum; ergo cum nec æquale nec minus fuerit, maius erit.

PROP. XX.

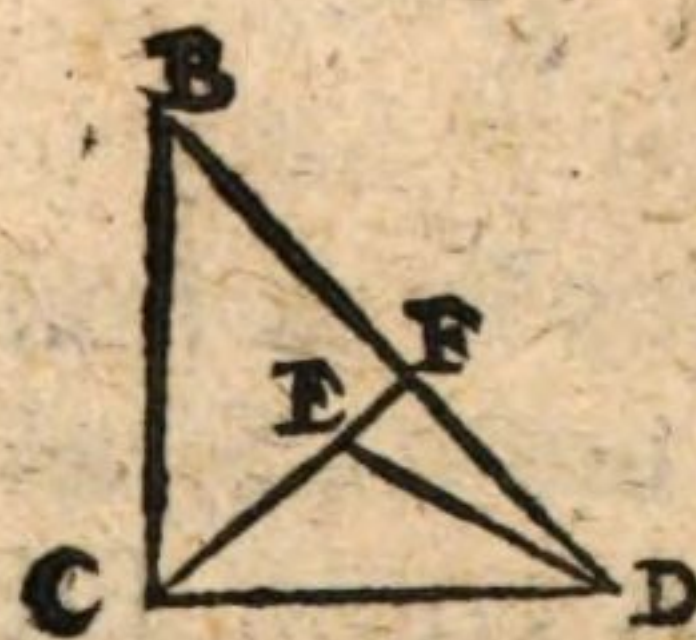
*Omnis trianguli duo latera, reliquo sunt maiora,
quomodocunque sumpta.*



Trianguli BCD latus DB extendatur in E, ita ut EB æquale sit CB & connectantur EC. *per 5.* E & BCE anguli æquales erunt. Est autem ECD angulus E angulo maior *per 9. axiom.* in triangulo ergo ECD latus ED, maiori angulo ECD oppositum, maius erit latere CD, quod minori angulo E opponitur *per 19.* Cum igitur latera CB, BD simul, æqualia sint ipsi ED, erunt quoque latera CB, BD simul, maiora latere CD.

PROP. XXI.

Si super trianguli uno latere, ab extremitatibus duæ rectæ interius constitutæ fuerint; hæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem verò angulum continebunt.

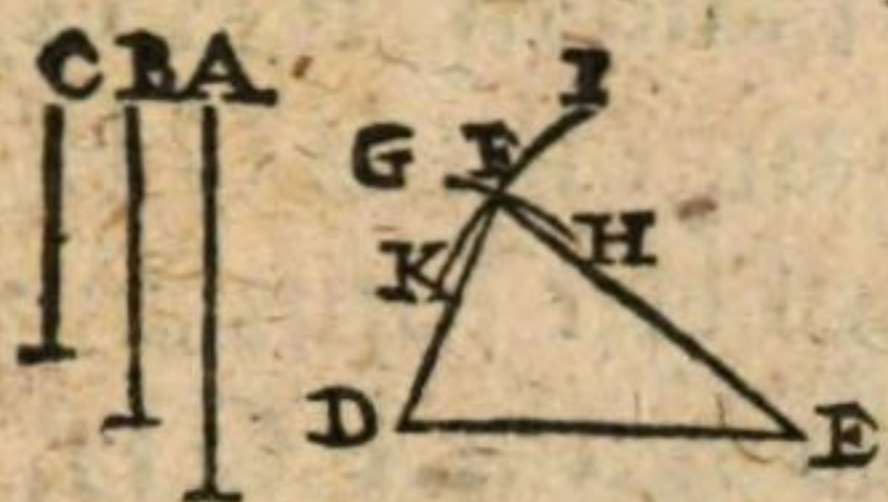


Trianguli BCD extremitatibus C & D, interius rectæ CE, DE ducantur, & CE ad F prolongatur. Quoniam CB, BF maiora sunt CF latere *per 20;* si commune FD addatur, erunt CB, BD maiora quàm CF, FD *per 4. axiom.* Rursus quia DF, FE maiora sunt ED, si commune CE addatur, erunt DF, FC maiora quàm DE, EC. maiora ergò erunt CB, BD, quàm CE, ED, quod primò proponebatur. præterea, quoniam DEC, angulo FED maior est *per 16.* & FED angulo FBC. *per eandem:* erit DEC, angulo DBC maior multò, quod secundò proponebatur.

PROP.

PROP. XXII.

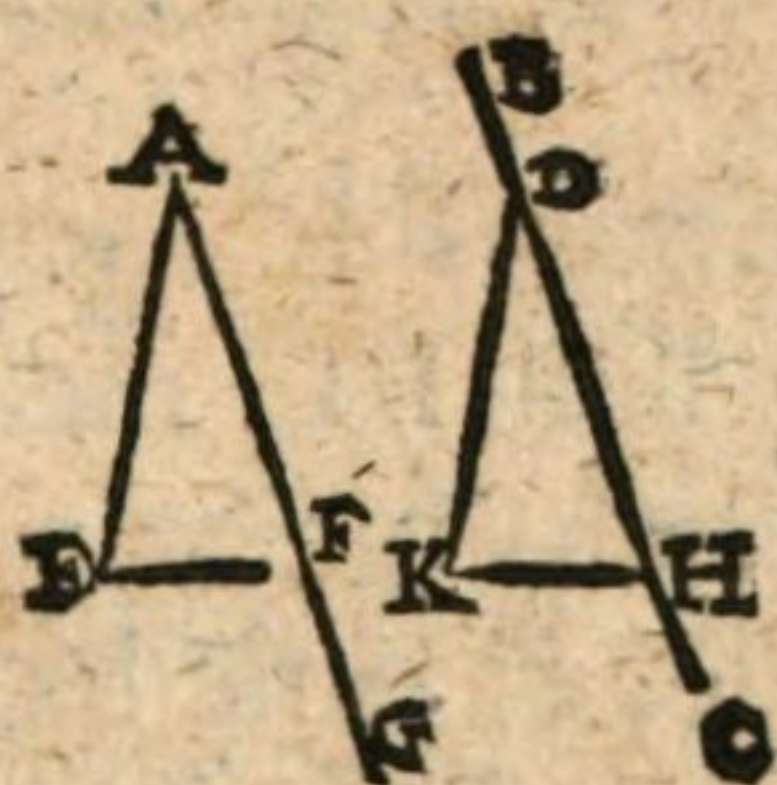
Ext ribus rectis, quæ tribus datis rectis æquales sunt, triangulum constituere. oportet autem duas rectas, reliquâ esse maiores, omnifariam sumptas.



Tres datæ rectæ A, B, C sint, & D E æqualis A; puncto D intervallo D F æquali C, arcus G F H describatur per 2: & intervallo F E æquali B, arcus K F I centro E ducatur; rectæ puncto intersectionis F, ad D & E puncta ductæ, datis rectis æquales erunt, scilicet D E. A. & D F. C. & E F. B. quod erat faciendum.

PROP. XXIII.

Ad datam rectam, datumq; in ea punctum, dato angulo rectilineo, æqualem angulum rectilineum ponere.



Ad punctum D, rectæ B C, angulum A ponemus; si de A G, abscindatur A F æqualis A E per 3, & D H æqualis A F sumatur: iam si super D H collocentur D K. k h, æquales A E. e f per 22. erit D, angulo A æqualis per 8. quod oportebat facere.

PROP. XXIV.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, utrumque utrique; angulum verò angulo maiorem, sub æqualibus rectis contentum: & basin basi maiorem habebunt.

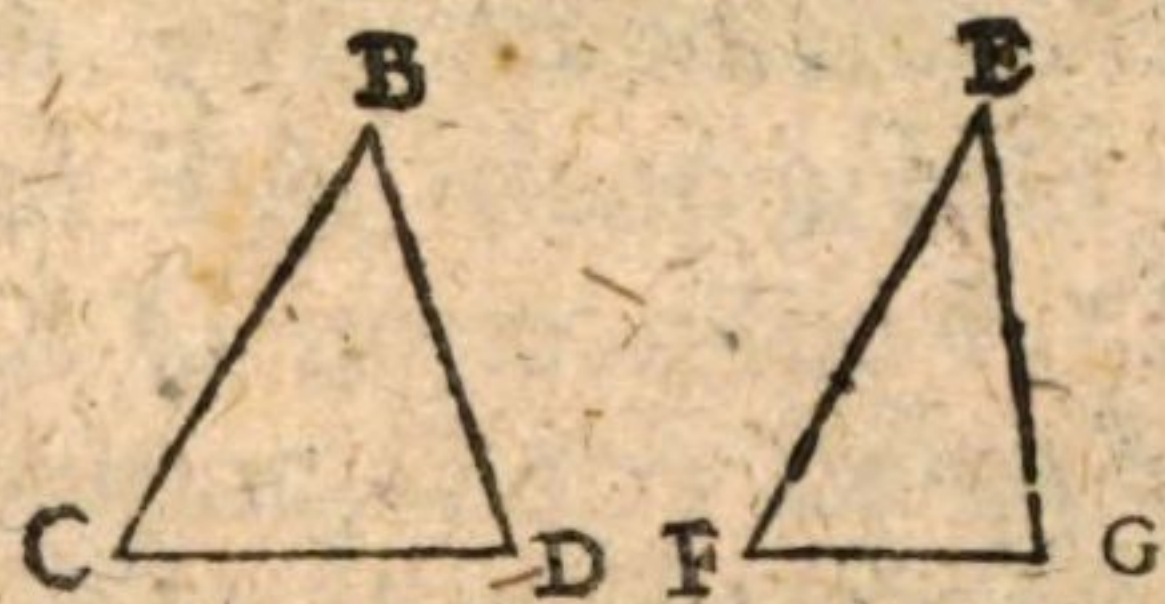


Duo latera C B, b d duobus lateribus F E, e g æqualia sint: angulus verò B angulo F E G maior;
B 3

maior; dico basin CD basi FG maiorem esse. Sit enim *per 23.* $\angle FEH$ factus $\angle B$ æqualis, & EH latus æquale EG , hoc est, BD ; ducantur FH , HG . Quia ergò latera CB *b d* lateribus FE *e h* æquantur, & $\angle B$ $\angle FEH$ *per constructionem*; bases CD , FH æquales erunt *per 4.* Rursum quia duo latera EG , EH inter se æquantur, ad basin GH $\angle G$ & $\angle H$ æquales erunt *per 5.* Est autem $\angle EHG$ maior $\angle FHG$ $\angle$ *per 9. axiom.* Igitur & $\angle EGH$ maior eodem $\angle FHG$ erit. quare multò maior erit totus $\angle FGH$ eodem $\angle FHG$. In triangulo igitur FGH , maius erit latus FH , latere FG *per 19.* Est autem ostensum FH æquale esse CD . maior igitur erit quoque CD quàm FG , quod est propositum.

PROP. XXV.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus, equalia habuerint, utrumque utrique; basin verò basi maiorem: & angulum sub equalibus rectis contentum, angulo maiorem habebunt.

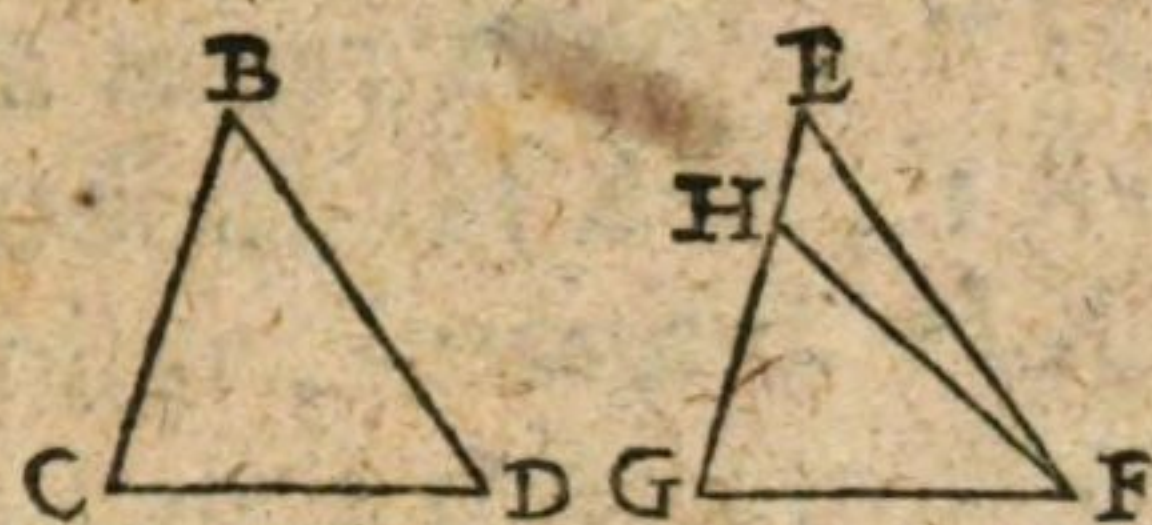


Latera CB *b d*, lateribus FE *e g* æquantur; & basis CD basi FG maior sit: Si $\angle B$ $\angle E$ angulo maior non fuerit; aut æqualis erit, & tunc bases æquabuntur *ex 4.* quod est contra hypothesin: aut minor, & sic CD minor foret FG *ex precedenti*, quod etiam contra hypothesin est. ergò $\angle B$ nec æqualis est cum E , nec minor; quare maior fuerit.

PROP. XXVI.

Si duo triangula, duos angulos, duobus angulis equalibus habuerint, utrumque utrique, unumq; latus uni lateri æquale, seu quod equalibus adiacet angulis, seu quod uni equalium angulorum subtenditur: & reliqua latera, reliquis lateri-

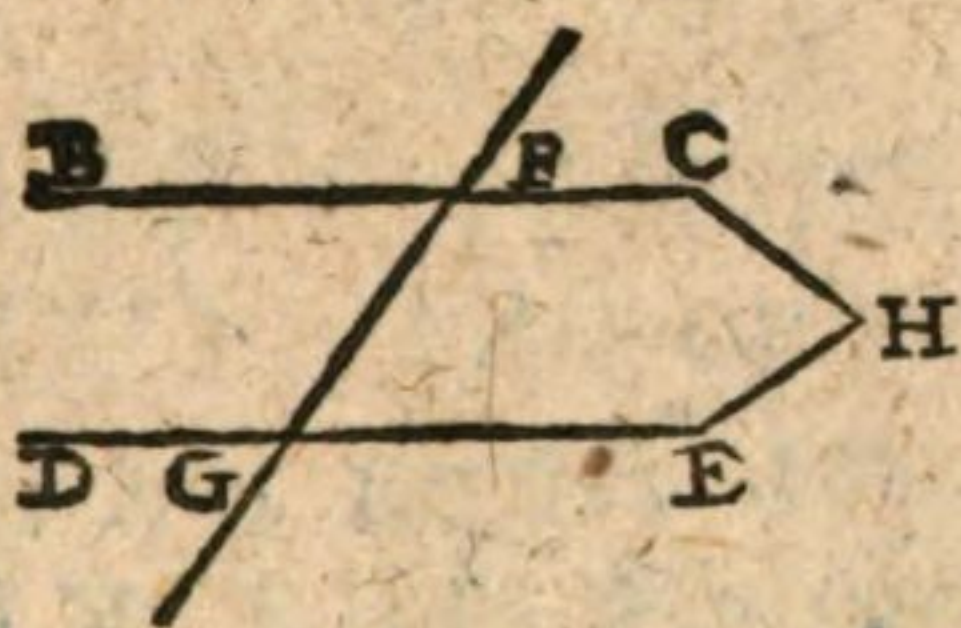
lateribus equalia, utrumque utrique, & reliquum angulum, reliquo angulo equalem habebunt.



Anguli C, *d*; angulis G, *e f g* æquantur; & C D latus G F lateri. Si iam E G, latere B C maius fuerit, æquale abscindatur *per 3*, quod sit H G, ducaturq; H F. quoniam B C *c d*, æquantur H G *g f*, & anguli C & G *per hypothesin*; D angulus æqualis erit H F G angulo *per 4*. Ponitur autem idem D æqualis G F E angulo; Quare & angulus G F H eidem G F E æqualis erit, pars tota quod est absurdum. Non est ergo B C inæquale E G: nec angulus angulo.

PROP. XXVII.

Si in duas rectas, recta incidens, alternatim angulos æquales inter se fecerit, parallelæ erunt inter se illæ rectæ.



In rectas B C, D E, recta F G incidens angulos B F G, F G E efficiat æquales: si datae rectæ parallelæ non fuerint, concurrant alicubi, ut exempli gratia, in H, ut efficiatur triangulum F H G. Erunt B F G angulus, interno & opposito F G H maior *per 16*, quod est contra hypothesin. ita quoque demonstrabitur eas non coituras ad partem oppositam; quare B C, D E parallelæ fuerint.

PROP. XXVIII.

Si in duas rectas, recta incidens, externum angulum, interno & opposito, & ad easdem partes, equalem fecerit; aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erant inter se ipsæ rectæ.

Sit F K C, angulo K H E æqualis: sed & B K H eidem F K C æqualis est



lis est *per 15.* erunt ergo anguli alterni KHE, HKB æquales *per 1 axiom.* quare linæ BC, DE parallelæ erunt *per præcedentem.* Deinde ponantur CKH, EHK duobus rectis æquales: sunt autem & CKF, CKH duobus rectis æquales *per 13.* si communis CKH auferatur, relinquetur CKF externus, EHK interno & opposito æqualis. rectæ ergo BC, DE parallelæ sunt.

PROP. XXIX.

In parallelas rectas, recta incidens, & alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit. Vide figuram præcedentem.

Si anguli alterni BKH, KHE non sint æquales; sit BKH maior. Si communis CKH addatur, erunt duo BKH, CKH maiores duobus KHE, CKH *per 4 axiom.* Atqui BKH, CKH duobus rectis æquales sunt *per 13.* igitur KHE, CKH minores sunt duobus rectis: coibunt ergo *per 11. axiom.* BC, DE ad partes CE quod est absurdum, cum ponantur parallelæ. Sunt igitur anguli alterni æquales, eademq; demonstratio est alternorum CKH, KHD. Deinde, quia CKH angulo, alternus KHD æqualis est, ut ostensum est, & idem CKH æqualis FKB *per 15.* erunt *per 1. axiom.* FKB, KHD inter se æquales. Postremò, quoniam ostensum fuit FKB, æqualem esse KHD; si communis BKH addatur, erunt duo FKB, BKH, duobus KHD, BKH æquales *per 2. axiom.* sed duo FKB, BKH duobus rectis æquales sunt *per 13.* ergo & duo KHD, BKH duobus rectis æquales erunt.

PROPO.

PROP. XXX.

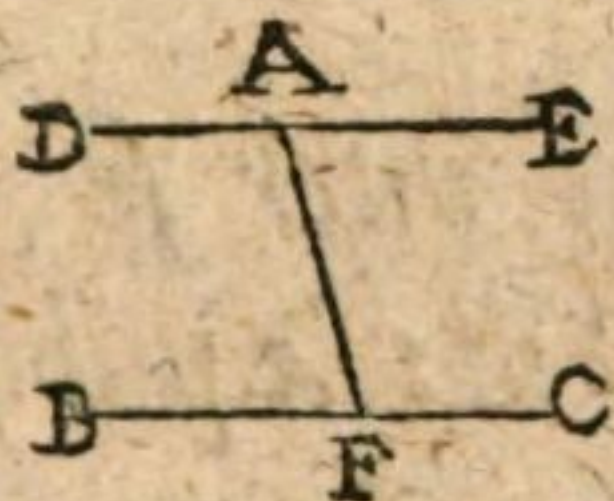
Quæ eidem rectæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.



Ponatur BC parallelæ FG. erit ergò BLN angulus, L N G æqualis *per* 29. Rursus ponatur DE eidem FG parallelæ. Erit ergò DML, eidem L N G æqualis. Quare anguli BLN, EML æquales inter se *per* 1. axiom. Cum igitur sint alterni, erunt rectæ BC, DE parallelæ *per* 27.

PROP. XXXI.

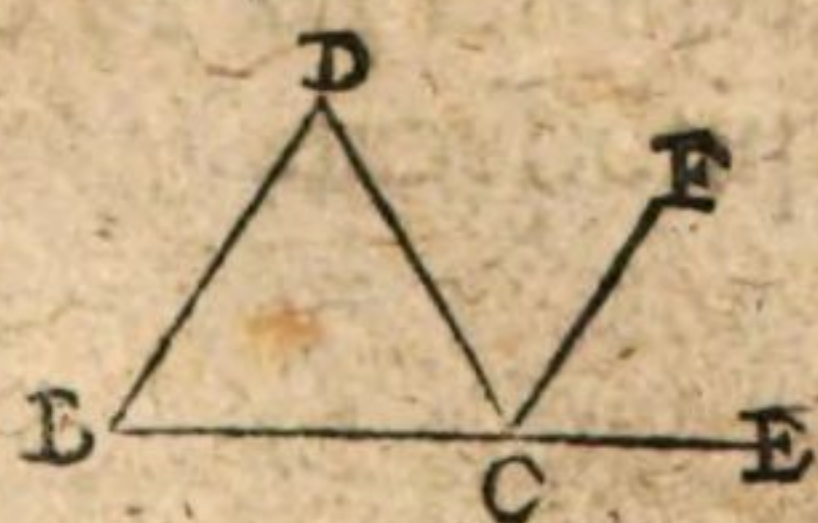
A dato puncto, datæ rectæ parallelam ducere.



A puncto dato A, in datam rectam BC, ducatur recta utcumque AF, faciens angulum quemcumque AFB, cui æqualis alternus EAF constituatur *per* 23. ad punctum A rectæ AF. Erunt ergò BC, DE parallelæ *per* 27.

PROP. XXXII.

Cuiuscunque trianguli vno latere producto, duobus internis & oppositis est æqualis: & trianguli tres interni anguli duobus rectis æquales sunt.



Extendatur BC in E, puncto C *per* 31. recta CF, parallelæ BD ducatur. Quoniam igitur DC in parallelas incidit, alterni anguli D & DCF æquales erunt: & externus angulus FCE interno B æqualis *per* 29. cum recta BE in easdem parallelas incidat: & cum

cum DCB , DCE per 13. duobus rectis sint æquales, tres trianguli anguli, duobus rectis æquales sunt.

PROP. XXXIII.

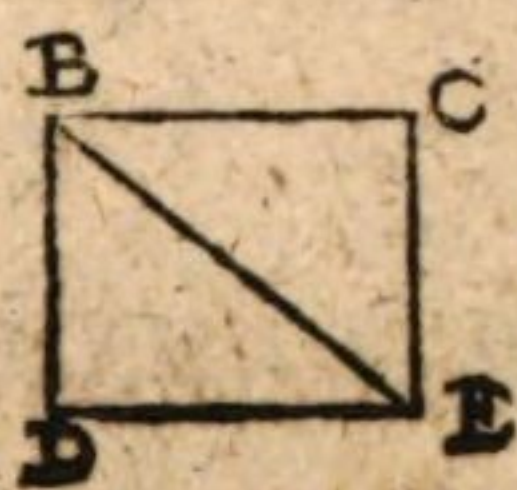
Rectæ, quæ æquales & parallelas ad partes easdem coniungunt, & ipsæ æquales & parallele sunt.



Sint parallelæ & æquales BC , DE coniunctæ rectis BD , CE , ducaturque BE , quæ cum in parallelas incidat, angulos alternos CBE , DEB efficiet per 29. æquales. Ergò cum duo latera BC & DE duobus lateribus DE & BC æquantur, & anguli dictis lateribus contenti, bases quoque CE , BD & anguli CEB , DBE æquales erunt per 4. Sunt verò hi anguli, alterni inter rectas CE , BD . Ergo ipsæ rectæ parallelæ per 27.

PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum, equalia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera & anguli; atque illa æquibisecat diameter.

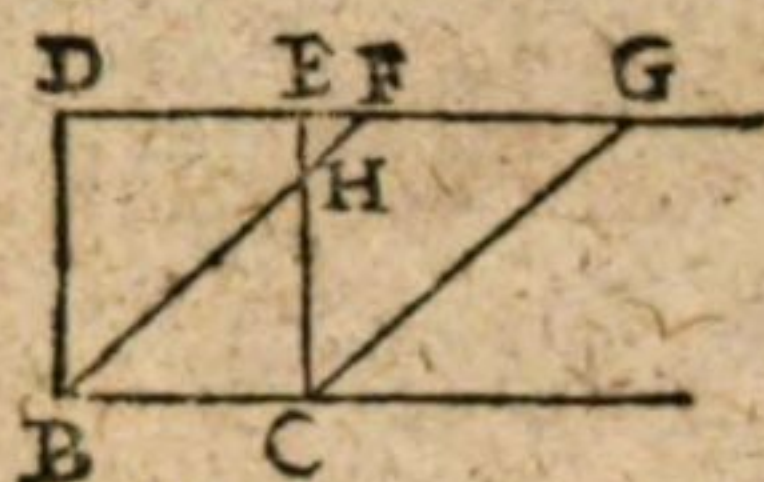


In parallelogrammo ducatur BE , quæ alternos angulos efficiat æquales, ut CBE cum DEB , & CEB cum DBE per 29. Itaque cum duo anguli CBE & DEB duobus angulis DEB & DBE æquantur, & latus BE utrique triangulo commune sit, rectæ BC , DE , & BD , CE æquales erunt, & angulus C angulo D , & duo triangula BCE , BDE , æqualia per 26 & 4. Ergò diameter BE parallelogrammum æquibisecat.

PROP. XXXV.

Parallelogramma super eadem basi & in eisdem parallelis constituta

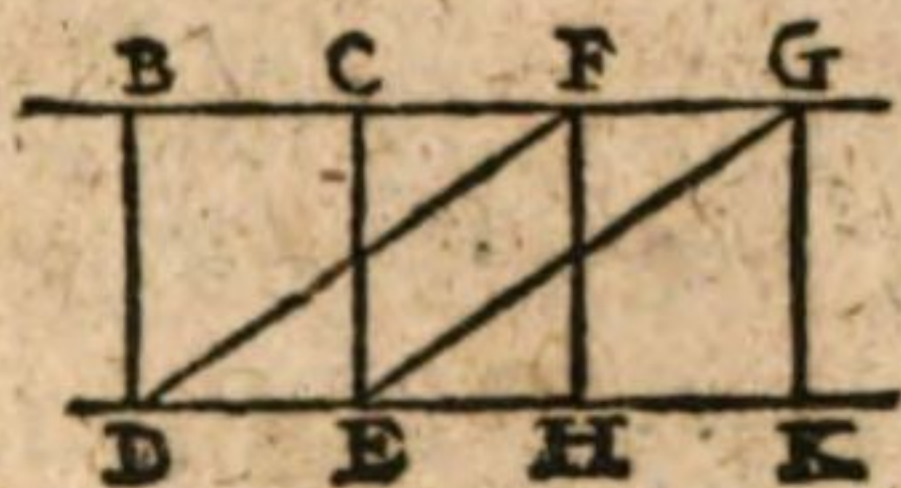
stituta inter se sunt equalia. [quo ad aream, non quo ad angulos & latera.]



Super basin BC duo parallelogramma ponantur DC , & CF . Quoniam DB , EC , & FB , GC æquantur; & DE , BC , & FG , BC per 34. etiam triangula DBF , ECG , quo ad latera & angulos inter se æqualia sunt per 4: ablato communi triangulo EHF , remanebit trapezium $DBHE$ trapezio $FHCG$ æquale per 3. *ax.* Quocirca addito communi triangulo BHC , fiet totum parallelogrammum $BCED$, toti parallelogrammo $BCGF$ æquale per 2. *axiom.*

PROP. XXXVI.

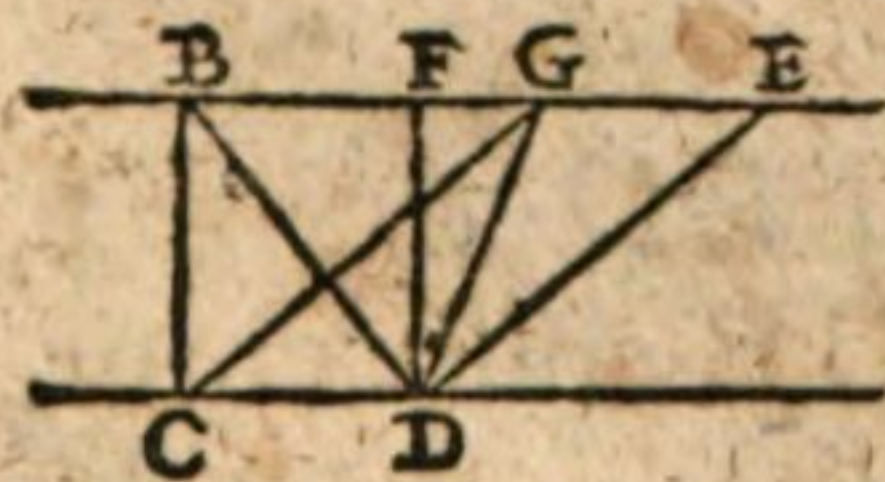
Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt equalia.



Sint parallelæ BG , DK & parallelogramma æqualium basium BE , FK , ducanturq; DF , EG quæ parallelæ erunt per 33: parallelogrammum GD æquale erit BE per 3. & FK . Erit ergo parallelogrammum BE parallelogrammo FK æquale per 1. *ax.*

PROP. XXXVII.

Triangula super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt equalia.

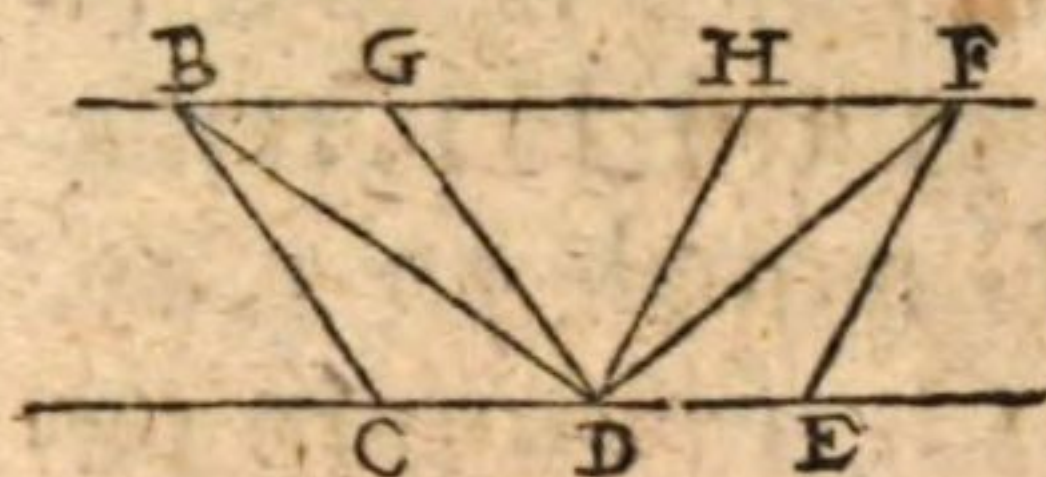


Super basin CD collocentur duo triangula BCD , CGD inter easdem parallelas BE , CD ; puncto D ducantur rectæ DE , & CF parallelæ rectis CG & CB , per 31. Erunt ergo parallelogramma CF , CE æqualia per 35. Sed horum dimidia sunt triangula data, quod DB , DG diametri,

metri, parallelogramma CF , CE æquibifecent *per 34*. Ergò & triangula BCD , CGD æqualia erunt *per 7. axiom.*

PROP. XXXVIII.

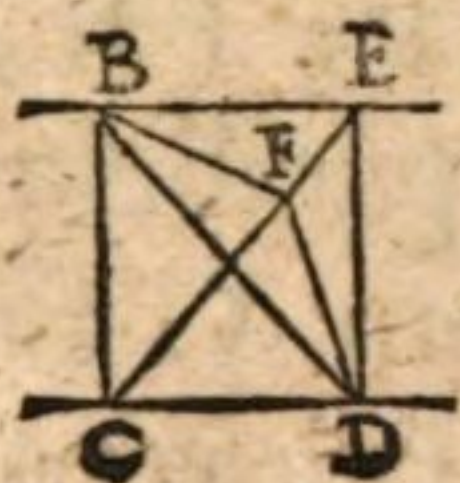
Triangula super æqualibus basibus & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.



Inter parallelas BF , CE triangula BCD , FED æqualium basium CD , DE collocentur; puncto D , rectæ DG , dh parallelæ rectis CB , ef ducantur *per 31*: Parallelogramma GC , HE æqualia erunt *per 36*: Atqui horum dimidia sunt data triangula *per 34*: Erunt ergò hæc inter se æqualia *per 7. axiom.*

PROP. XXXIX.

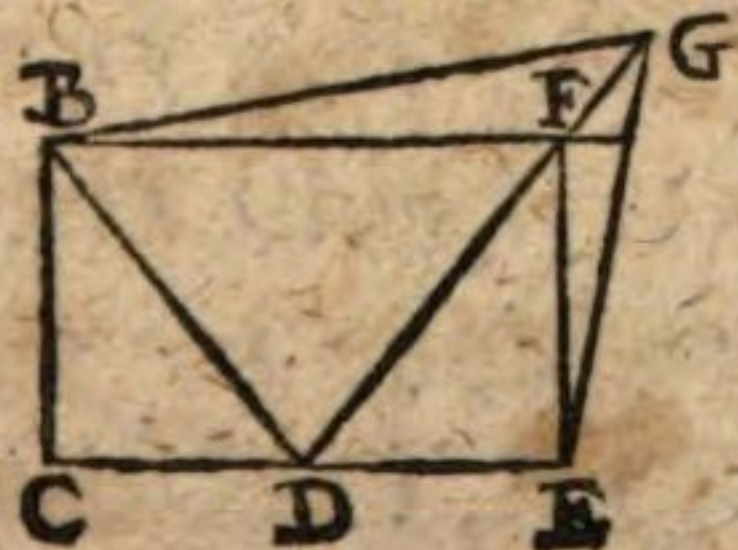
Triangula æqualia super eadem basi & ad easdem partes constituta, & in eisdem parallelis sunt.



Si triangula BCD , EDC ad basin CD sint æqualia; BE verò parallelæ non fuerit, puncto B *per 31.* ducatur BF parallelæ CD ; & FD . Erunt ergò triangula BCD , FDC *per 37.* æqualia. Sed ex hypothese triangulum EDC æquale est BCD ; Igitur triangula EDC , FDC æqualia erunt *per 1. axiom.* quod est absurdum. Ergò BE parallelæ est CD .

PROP. XL.

Triangula æqualia super æqualibus basibus & ad easdem partes constituta, & in eisdem parallelis sunt.

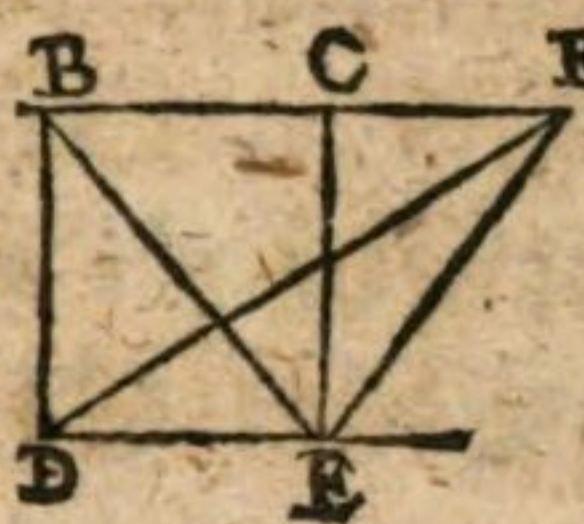


Si duo triangula BCD , FED æqualia, super bases æquales CD , DE collocentur; BF verò CE parallelæ non fuerit: ex B ducatur BG parallelæ CE ; & GE . Erunt ergò trian-

triangula BCD , GED æqualia *per 38*. Atqui FED æquale ponebatur BCD triangulo. Ergò *per 1. axiom.* GED , FED æqualia erunt, quod est absurdum. Ergò BF , CD ap parallelæ sunt.

PROP. XLI.

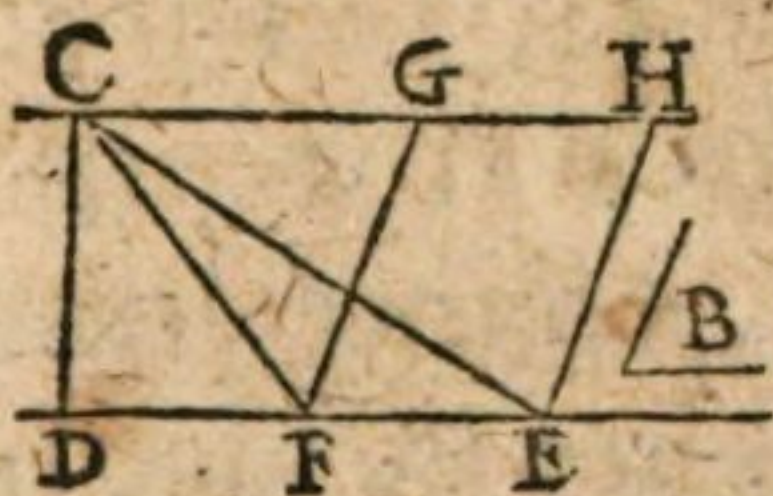
Si parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemq; parallelis fuerit, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.



Super eadem basi DE , parallelogrammum DC & triangulum $D FE$ collocentur inter easdem parallelas BF , DE ; diameter BE ducatur. Triangula BDE , $D FE$ æqualia erunt *per 37*. Atqui parallelogrammum DC duplum est trianguli BDE , quod triangula BCE , BDE æqualia inter se sint *per 34*. Igitur & trianguli $D FE$ duplum erit idem parallelogrammum CD *per 6. axiom.*

PROP. XLII.

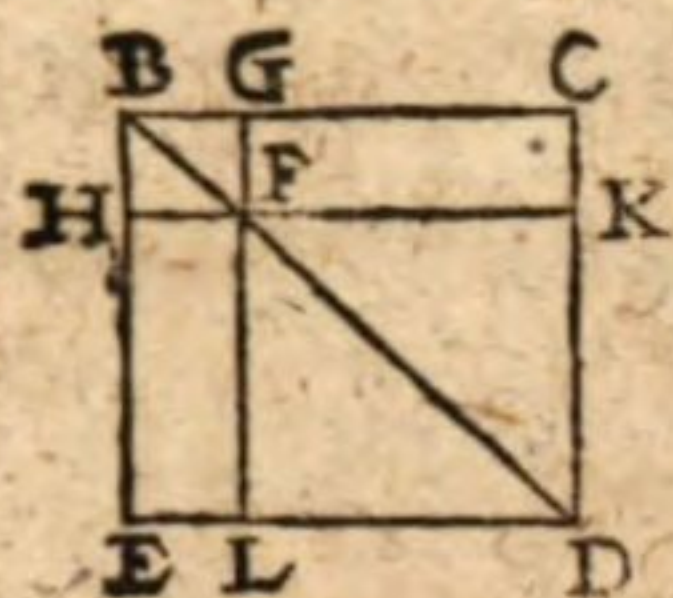
Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.



Datur angulus B , & triangulum CDE , cui æquale parallelogrammum ponendum. Æquibisecetur DE *per 10*, & fiat $EF G$ angulus B æqualis *per 23*. ducatur *per 31*. puncto C recta, parallela DE infinitè, & puncto E , recta parallela FG , incidens in CH . Erit ergo in angulo $EF G$ qui dato B æqualis est, parallelogrammum FH , constitutum æquale triangulo dato: quia parallelogrammum FH duplum est trianguli $C FE$ *per 41*: & CDE eiusdem trianguli duplum, cum super æquales bases DF , FE & in eisdem parallelis collocentur *ex 38*. Erunt ergò parallelogrammum FH & triangulum CDE æqualia, *per 6 axiom.*

PROP. XLIII.

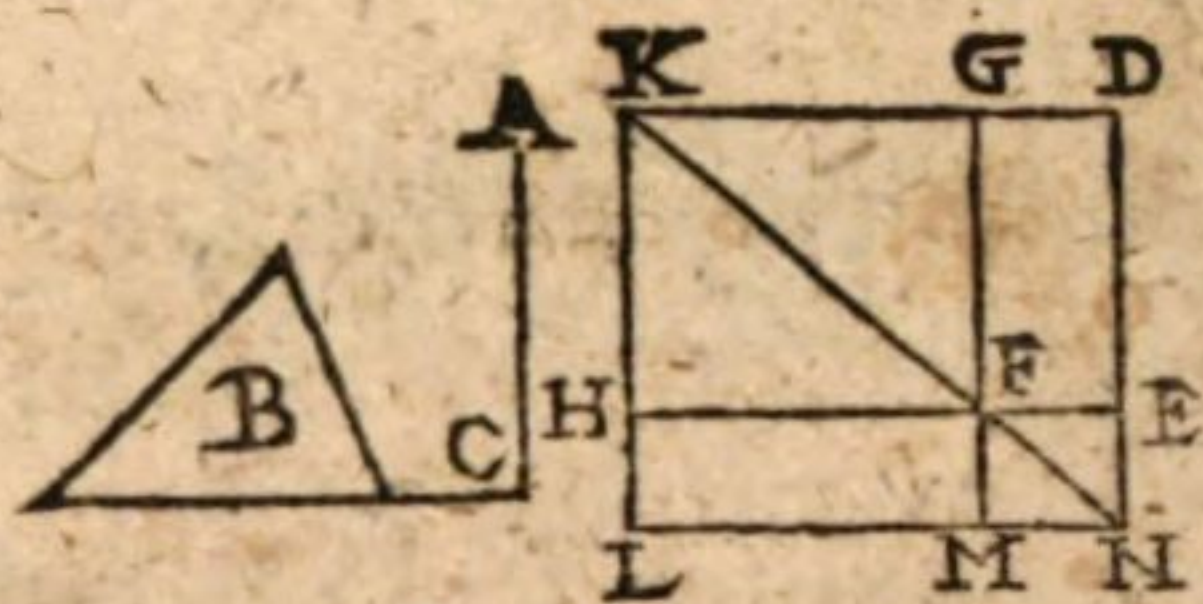
In omni parallelogrammo, complementa eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



In parallelogrammo EC circa diametrum BD, parallelogramma sint HG, LK; & complementa CF, FE. Cum triacula BCD, BED per 34 æqualia sint, & FKD, FLD triacula: si hæc ab illis demantur, remanebunt trapezia BCKF, BELF æqualia per 3. axiom. sunt verò triacula BGF, BHF æqualia per 34, quæ si auferantur ab æqualibus trapezijs, remanebunt æqualia complementa CF, FE per 3. axiom.

PROP. XLIV.

Ad datam rectam, dato triangulo, æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

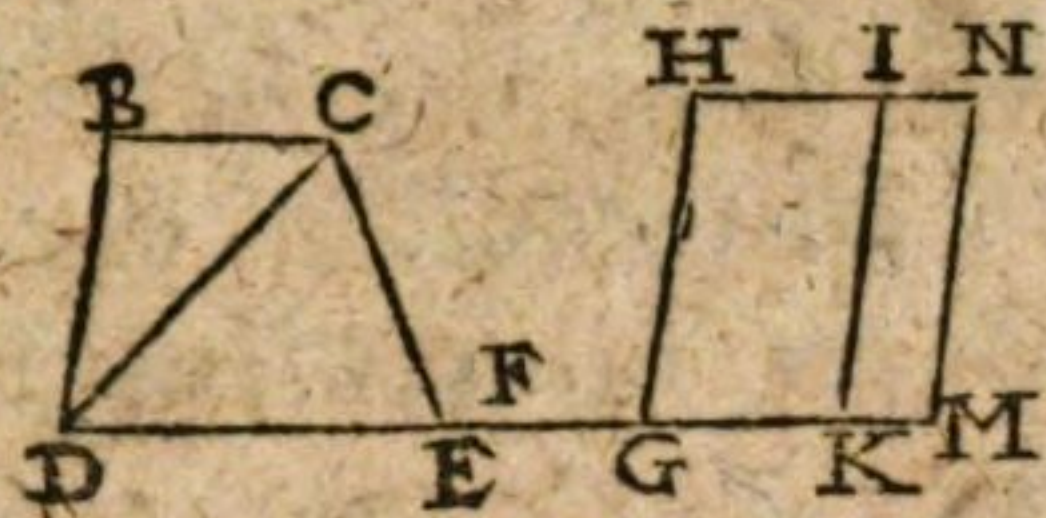


Datur recta A, triangulum B, angulus C quicunque. Constituatur triangulo B æquale parallelogrammum DF, angulum habens EFG, dato C æqualem per 42. Extendatur EF in H, ita ut FH æqualis sit rectæ A, & DG extensa, ei æqualis KG, connectantur KH: ducatur deinde ex K per F diameter, donec incidat in DE protractam in puncto N, à quo recta parallela rectæ EH ducatur per 31, secans KH protractam in L; producat G ad M: parallelogrammum LF satisfacit quæsito. Habebit enim latus FH æquale datæ CA, & HFM angulum, C dato: cum HFM angulus GFE angulo æqualis sit per 15, qui factus est æqualis C angulo. Est etiam parallelogrammum LF triangulo B æquale, cum æquale sit complemento DF per precedentem, quod æquale factum est triangulo B.

PROP.

PROP. XLV.

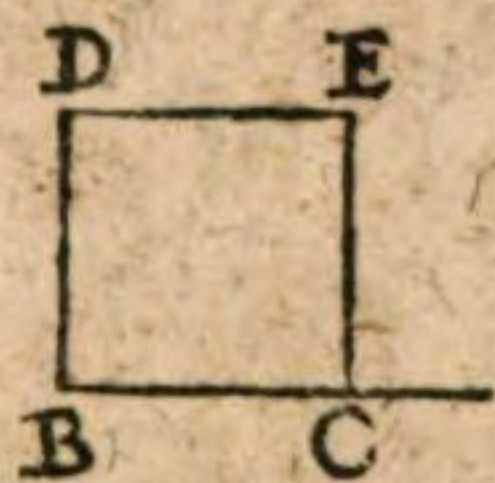
Dato rectilineo, æquale parallelogrammum, in dato angulo rectilineo ponere.



Datur rectilineum BE, resolutum in triacula CBD, CED, & angulus F, & recta GH; ad cuius punctum G angulus ponatur, F æqualis *per* 23, & efficiatur parallelogrammum HK æquale triangulo CBD *per* 42. Ad KL quoque, [GH æqualem] applicetur parallelogrammum LM æquale triangulo CED. Quoniam GH parallela & æqualis est KL, & eidem MN; ergo & GH, MN, & GM, HN æquales & parallelæ erunt *per* 33. Erit itaque totum parallelogrammum HM, toti rectilineo BE æquale, latus & angulum habens rectæ & angulo datis æqualem.

PROP. XLVI.

A data recta quadratum describere.

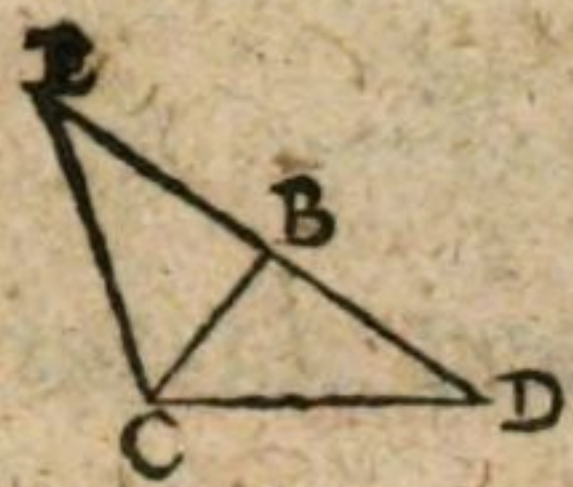


Datur recta BC, ex B & C perpendiculares *per* 11 educantur BD, CE; sintq; ipsi CB æquales, connectatur DE. Cum B & C anguli recti sint, BD, CE parallelæ erunt *per* 28. Sunt verò & æquales. Ergo BC, DE parallelæ & æquales *per* 33, & omnes lineæ æquales. Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum ED, æquales sunt BC, oppositis *per* 34. Quadratum ergo est DC *per* 30. *defin.*

PROP. XLVII.

In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est ijs, quæ à lateribus rectum angulū constituentibus describitur quadratis.

Trianguli BCD angulus C rectus sit, erigantur super singula



dratum, æquale sit quadratis laterum CB , BD .
 Deinde puncto B liniæ CB perpendicularis *per* 11.
 æqualis BD *per* 2. erigatur. connectatur EC .
 Quoniam igitur CBE angulus rectus est, qua-
 dratum de EC quadratis de EB , BC æquabi-
 tur *per* 47. Atqui quadratum de EB quadrato de BD æqua-
 tur, ob linearum æqualitatem: Quare quadratum rectæ EC
 quadratis rectarum CB , BD æquale erit. Cum ergò qua-
 dratum de CD eisdem rectarum quadratis æquale ponatur;
 Erunt quadrata rectarum EC , CD æqualia *per* 1. *axiom.* ergò
 & rectæ ipsæ. Quoniam igitur latera CB , *be*, latetibus BC ,
bd æqualia sunt, & basis EC basi CD , *ostensus est* æqualis;
 anguli CBE , CBD æquales erunt *per* 8. est autem CBE
 rectus, ex constructione; etgò & CBD rectus erit.

FINIS LIBRI PRIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

SECNDVS.

Immensum usum rebus Geometricis, & humanis commercijs adfert.
 Sumuntur enim pulchra calculi compendia ex hoc libro. Surdorum do-
 ctrina admirabilis tota hinc dependet. Algebraicarum æquationum reso-
 lutiones, insigni artificio hinc deducuntur; quibus nihil humana mens di-
 uinius, nihil abstrusius, nihil utilius, nihilque facilius excogitare unquam
 potuit. Quam vim 12. & 13. huius cum 47. primi, in Astronomicis ha-
 bebant, tum demum quivis intelliget, cum in triangulorum tractationem
 inciderit, in qua semper ex tribus notis, ad reliquorum trium notitiam,
 mediante arcuum & chordarum tabula pervenitur. Postremò, ultima hu-
 ius omnem figuram rectilineam irregularem vel etiam plures, ad quadra-
 tum æquale summa facilitate reducit; ut verè aureus dicendus hic liber
 mole perexiguus, fructu immensus.

D DEFINI-

DEFINITIONES.

1. Omne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duabus, quæ rectum angulum comprehendunt.
2. In omni parallelogrammo spatium, unumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt parallelogrammorum cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

PROP. I.

Si fuerint duæ rectæ, seceturq; ipsarum altera, in quocunque segmenta; rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis, æquale est eis, quæ sub infecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

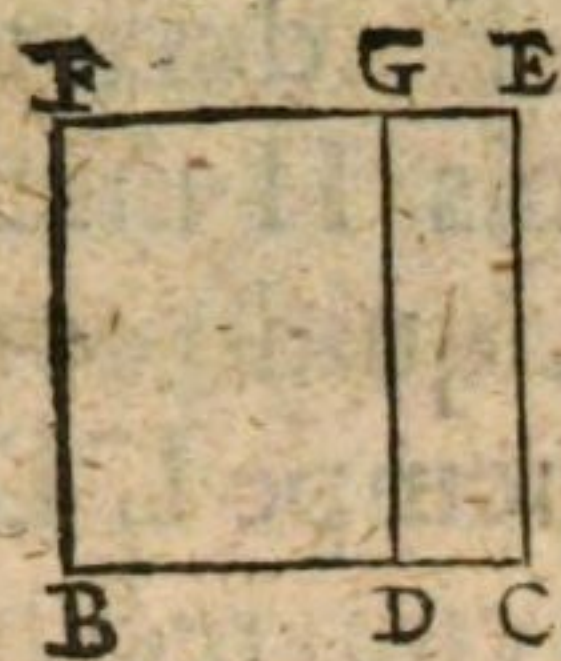


Sint rectæ A, CD, quarum CD secetur ad libitum in F & H. Punctis C, D, erigantur perpendiculares CB, DE, æquales A connectatur BE, eritq; rectangulum BD, contentum sub A siue BC, & CD ex 1. defin. Ex F & H, ducantur FG, HK parallelæ CB; erunt & inter se parallelæ per 30. 1. & per consequens æquales. Tria ergo parallelogramma BF, GH, KD, rectangula erunt per 29. 1. & cum æqualia sint toti rectangulo BD, perspicuum est comprehensum sub A, & CD, æquale esse rectangulis omnibus quæ sub A, & segmentis CF, FH, HD comprehenduntur.

PROP. II.

Si recta, secta sit utcunque; rectangula quæ sub tota & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

Super recta BC, secta utcunque in D, quadratum BE collocetur,



locetur, puncto D excitetur ad angulos rectos DG, ut æqualis & parallela sit BF; eruntq; rectangula duo BG, DE *per* 34. I. quæ cum æqualia sint quadrato FC, perspicuum est rectangula comprehensa sub BC & segmentis BD, DC, æqualia esse quadrato totius BC.

PROP. III.

Si recta, secta sit utcunque; rectangulum sub tota & uno segmentorum comprehensum, æquale est illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

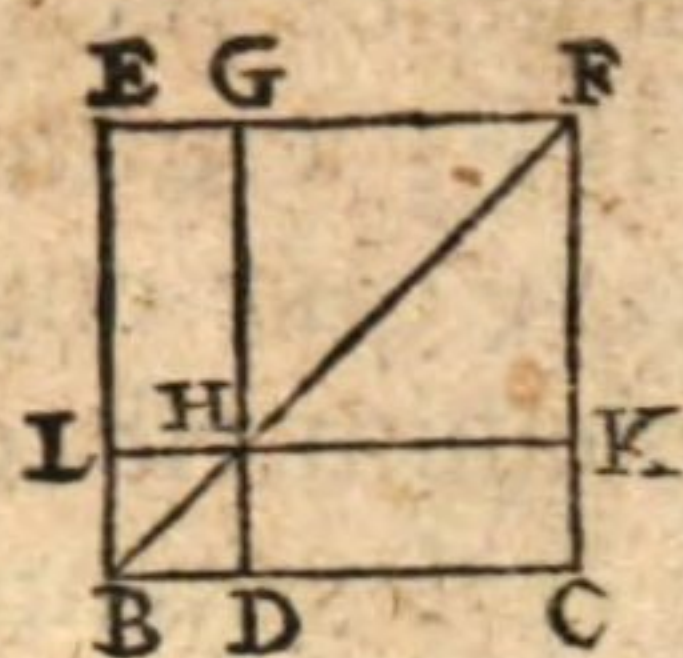


Recta CB, utcunque in D secetur, super alterutro segmentorum (sive id maius sive minus fuerit) CD, quadratum CE, & ex B, BF parallela CG erigatur, donec cum GE in F protracta coeat. Cum igitur CG, rectæ CD æqualis sit, *ex def. quadrati*, erit rectangulum CF sub tota BC & segmento CD comprehensum: & quia DE, eadem ratione æqualis est CD, erit rectangulum DF sub CD, DB segmentis comprehensum. Cum igitur rectangulum CF æquale sit quadrato CE & rectangulo DF; evidens est, rectangulum sub CB tota, & segmento CD comprehensum, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CD, DB & quadrato dicti segmenti CD.

PROP. IV.

Si recta, secta sit utcunque; quadratum quod à tota describitur, æquale est illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmento comprehenditur, rectangulo.

Super BC, secta utcunque in D, quadratum CE erigatur,
D 2 & DG



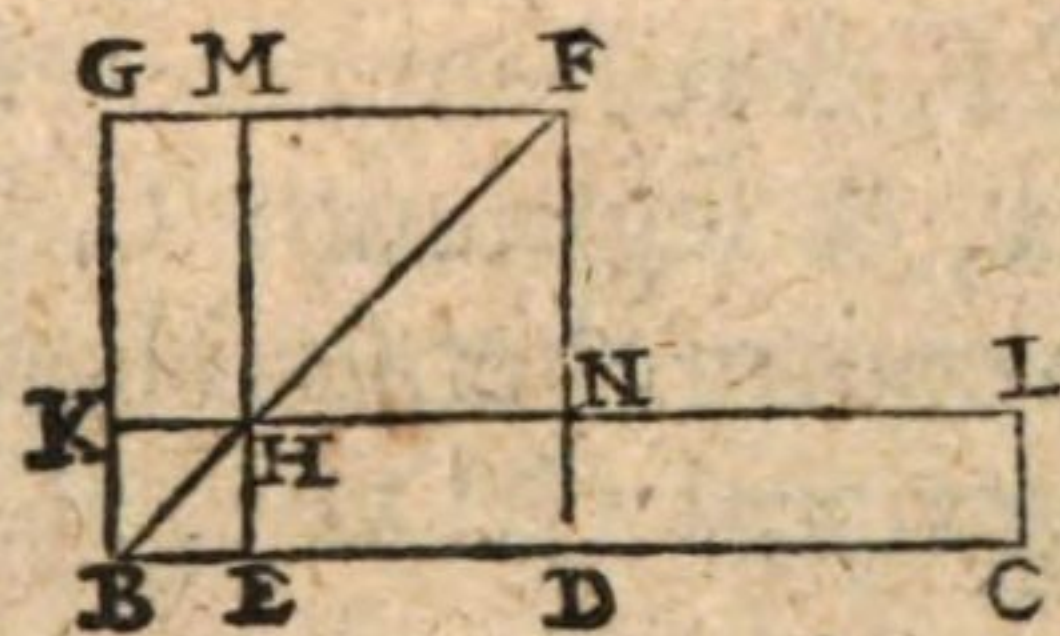
& DG parallela & æqualis sit BE. ducatur BF diameter, puncto intersectionis H ducatur LK, parallela & æqualis BC. Liquido constat, quadrata segmentorum BD (nempe LD) & DC (nempe GK quadratum) cum rectangulo sub BD, DC comprehenso bis sumpto (hoc est, EH, HC rectangula) efficere totum quadratum EC: quare totius BC, quadratum CE, æquale est quadratis segmentorum BD, DC & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis bis sumpto.

Corollarium.

Hinc liquet in quadratis spacijs, parallelogramma circa diametrum, esse quadrata.

PROP. V.

Si recta, secetur in æqualia & non æqualia; rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, una cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur quadrato.

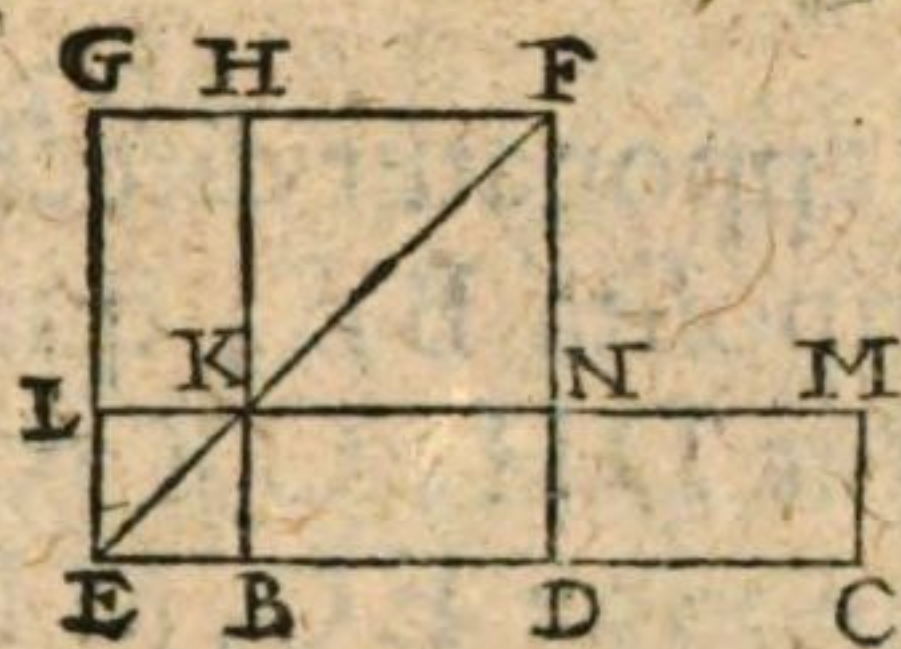


Recta BC, secta æqualiter in D, & inæqualiter in E; fiat rectangulum EL, sub inæqualibus segmentis EC, BE comprehensum. Sit etiam quadratum super BD erectum, ducta diametro BF, ducaturque EHM, parallela BG, secans diametrum in H, & protrahatur LH in K. Quoniam ergò EK, NM quadrata sunt *per corollarium precedentis*, complementa GH, EN æqualia sunt per 43. 1. Si addatur commune quadratum KE, erit parallelogrammum GE parallelogrammo BN æquale. per 36. 1. Igitur GE, DL æqualia inter se erunt: quibus si commune EN apponatur, erit gnomon MBN rectangulo EL æqualis. Quocirca cum gnomon & qua-

& quadratum NM æqualia sint quadrato DG per 4. erit & rectangulum EL una cum quadrato MN intermediæ ED , eidem quadrato GD æquale.

PROP. VI.

Si recta æquibisecetur, & illi recta quedam in directum adijciatur; rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, una cum quadrato à dimidia; æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab una descripto.



Recta BC , æquibisecetur in D , directè ei recta EB apponatur. Rectangulum EM fiat, comprehensum sub tota composita [hoc est EC] & adiecta EB [id est EL :] sit etiam quadratum GD erectum super ED , & ducatur BH parallela & æqualis EG , &

diameter EF . Quoniam per constructionem, BD æqualis est LG [hoc est, KH , aut KN :] evidens est, quod HN , quadratum sit, quod cum EM rectangulo, quadrato DG æquatur; quare & rectangulum GK æquale est rectangulo KD , [hoc est DM] per constructionem.

PROP. VII.

Si recta secetur utcumque; quod à tota, quodque ab uno segmentorum, utraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

Figura quarta
propositioni quæ
apponitur, huic
quoque pertinet.

Secetur BC utcumque in D , rectangulum fiat BK sub DC & BD comprehensum, describatur quadratum CE super BC , ducatur DG parallela & æqualis BE , & diameter BF . Quoniam igitur gnomoni GBK , una cum quadrato D 3 GK , æquale

GK, æquale est quadratum CE per 4. si apponatur commune quadratum DL, erunt quadrata CE, DL, æqualia rectangulis LC, ED (quorum quodlibet comprehenditur sub tota BC & segmento BD) una cum GK quadrato reliqui segmenti DC.

PROP. VIII.

Si recta secetur utcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab una recta, describitur, quadrato.

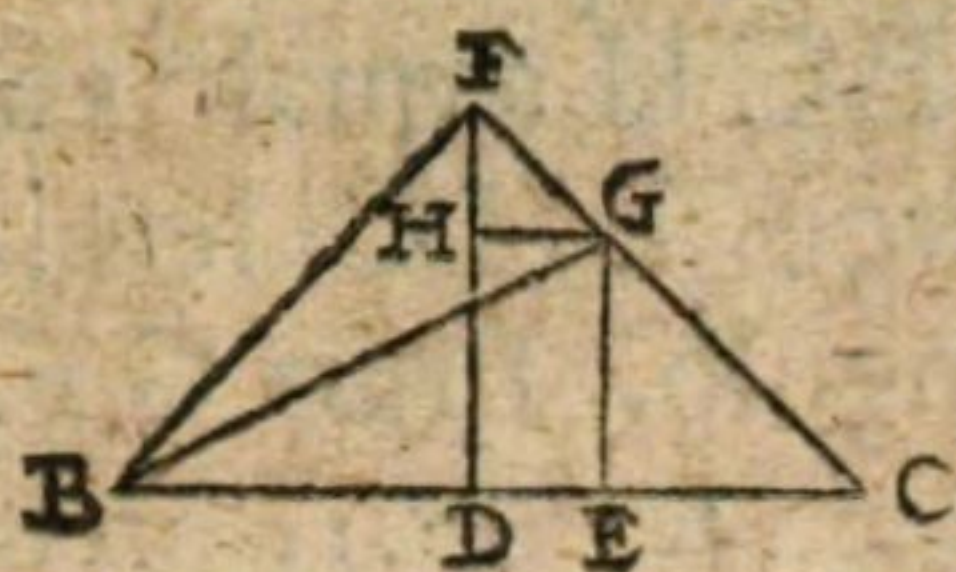


Secetur BC utcunque in D, apponatur directe CE æqualis BD. Super composita BE, quadratum EG erigatur, ducantur DH, CK parallelæ & æquales BG. Sint quoque EO, MF, æquales CE, [hoc est, BD] ducanturq; ON, ML parallelæ & æquales BE: Patet ergo quatuor rectangula BS, CM, FP, HN facta esse ex tota BC, & segmento BD; & quadratum SP, factum esse ex segmento altero DC: quæ quatuor rectangula una cum quadrato SP, cum quadratum super tota BC & adiecta CE erectum, componant; quadratum EG super composita BE excitatum, quatuor rectangulis cum quadrato SP æquale erit.

PROP. IX.

Si recta secetur in æqualia, & non æqualia; quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

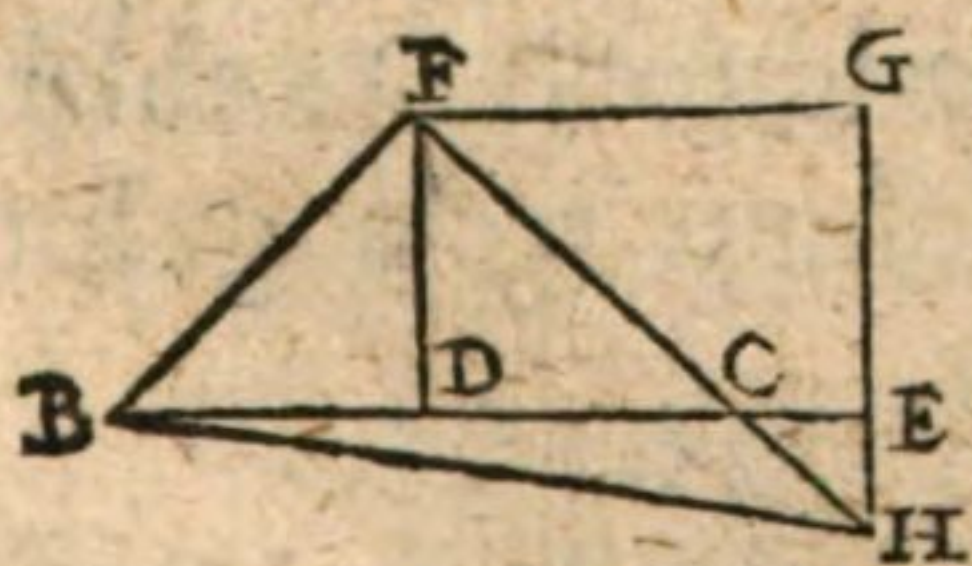
Recta BC, secetur æqualiter in D, & inæqualiter in E, ad angulos rectos DF erecta, æqualis cum BD, ducantur FB, FC. Quo-



FC. Quoniam triangula BDF, CDF isoschelia sunt, ad basin anguli *per* 5. 1. æquales erunt. Sed BDF angulus rectus est, quemadmodum & CDF. Ergo *per* 32. 1. angulus DBF semirectus erit, ut & DFB, DFC, DCF: qui cum DFB iuncti rectum efficient angulum BFC. Excitetur EG ad angulos rectos donec secet rectam FC in puncto G, à quo GH ducatur parallela & æqualis DE. Constat etiam GE æquari EC (angulo GEC recto existente & ECG semirecto quemadmodum & EGC) *per* 6. 1: eadem ratione HG, æqualis est HF: ducatur BG. Quoniam *per* 47. 1. quadrata de BE, EC sive EG, quadrato de BG æquantur; hoc verò quadratis de BF, FG: & quadratum de BF quadrati de BD duplum est; quadratum verò de FG duplum quadrati de HG sive de DE: liquidò constat quadrata inæqualium segmentorum BE, EC simul sumpta duplicia esse, & eius, quod à dimidia BD, & eius, quod ab intermedia sectionum DE fit, quadrati.

PROP. X.

Si recta æquibisecetur, adijciatur autem ei in rectum, quæpiam recta; quod à tota, cum adiecta, & quod ab adiecta, utraqûe quadrata simul, duplicia sunt, & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiecta tanquam ab una recta, descriptum sit, quadrati.

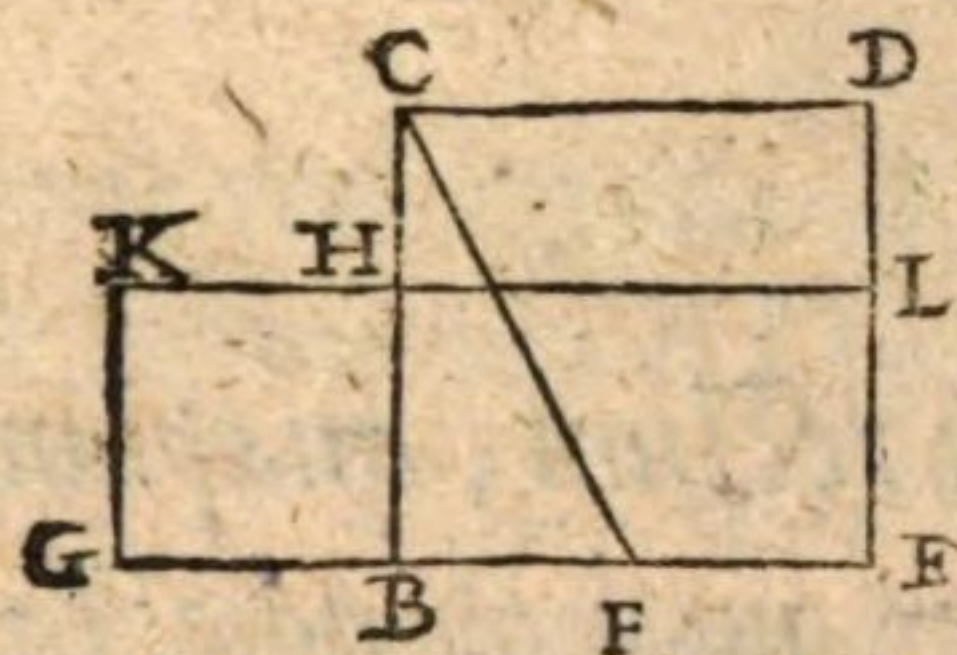


Recta BC æquibisecetur in puncto D, à quo ad angulos rectos DF æqualis DB erigatur, & apponatur CE in directum rectæ BC. fiat rectangulum DG, & ducantur FB, FC. angulus BFC rectus est (utpote ex duobus semirectis compositus) *ut in præcedenti*. Protrahantur GE, FC, donec coeant in H. Erit CEH trian-

$\triangle CEH$ triangulum, rectangulum, & Iſoſchele: quia $\angle FCD$ ſemirectus eſt *per conſtructionem*; huic verò $\angle ECH$ æqualis eſt *per 15.1.* Sed $\angle CEH$ rectus eſt *per 13.1.* Ergò $\angle EHC$ ſemirectus *per 32.1.* qui & æqualis eſt $\angle GFH$ angulo. Ergo GF , GH æquales ſunt *per 6.1.* ducatur BH . Quia *per 47.1.* quadratum de BH , quadratis de BE , EH , ſive EC æquale eſt, & idem æquale quadratis de BF , FH ; & quadratum de BF , duplum quadrati dimidiæ BD ; & quadratum de FH duplum quadrati de FG (hoc eſt; DE , quæ dimidia eſt cum appoſita.) Quadratum totius & appoſitæ BE cum quadrato appoſitæ CE ſive EH duplum eſt quadratorum dimidiæ BD , & dimidiæ cum appoſita DE .

PROP. XI.

Datam rectam ſecare, ut comprehenſum ſub tota, & altero ſegmentorum rectangulum, æquale ſit ei, quod à reliquo ſegmento ſit, quadrato.

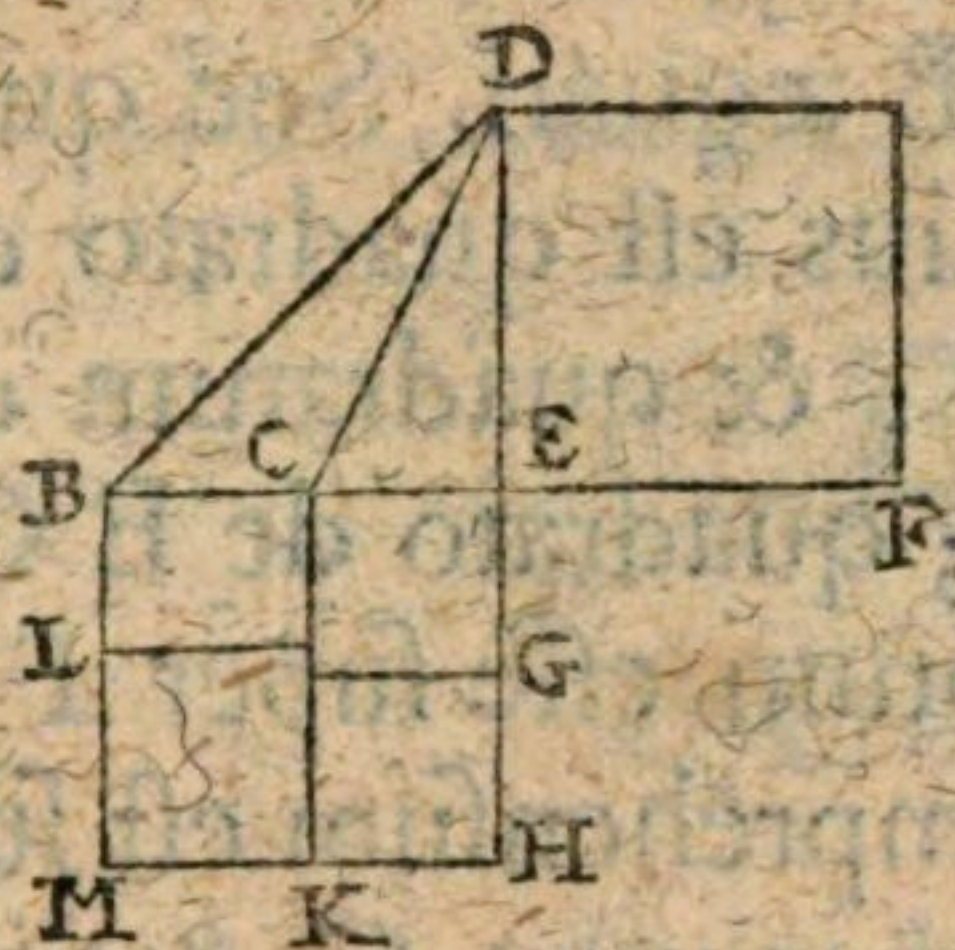


Data recta ſit BC ſuper qua quadratum BD erigatur, æquibiſecetur EB in F , ducatur FC . & extendatur EB ad G , donec FG , æqualis ſit FC : ſuper BG , quadratum BK deſcribatur, & KH extendatur in L . Quoniam rectangulum LG comprehenſum ſub tota BC & appoſita BG tanquam una recta EG , & appoſita BG ſive GK cum quadrato dimidiæ FB ; quadrato de FG , [hoc eſt FC ,] æquatur *per 6.* Quadratum verò de FC quadratis de FB , BC æquatur *per 47.1.* dempto communi quadrato FB , relinquetur rectangulum LG , æquale de BC quadrato BD : ablato rurfus communi rectangulo BL , remanebunt rectangulum DH , & quadratum HG inter ſe æqualia.

PROP. XII.

In ambligonijs triangulis quadratum quod ſit à latere angulum obtuſum

obtusum subtendente, maius est quadratis quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab uno laterum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea, sub perpendiculari prope angulum obtusum.

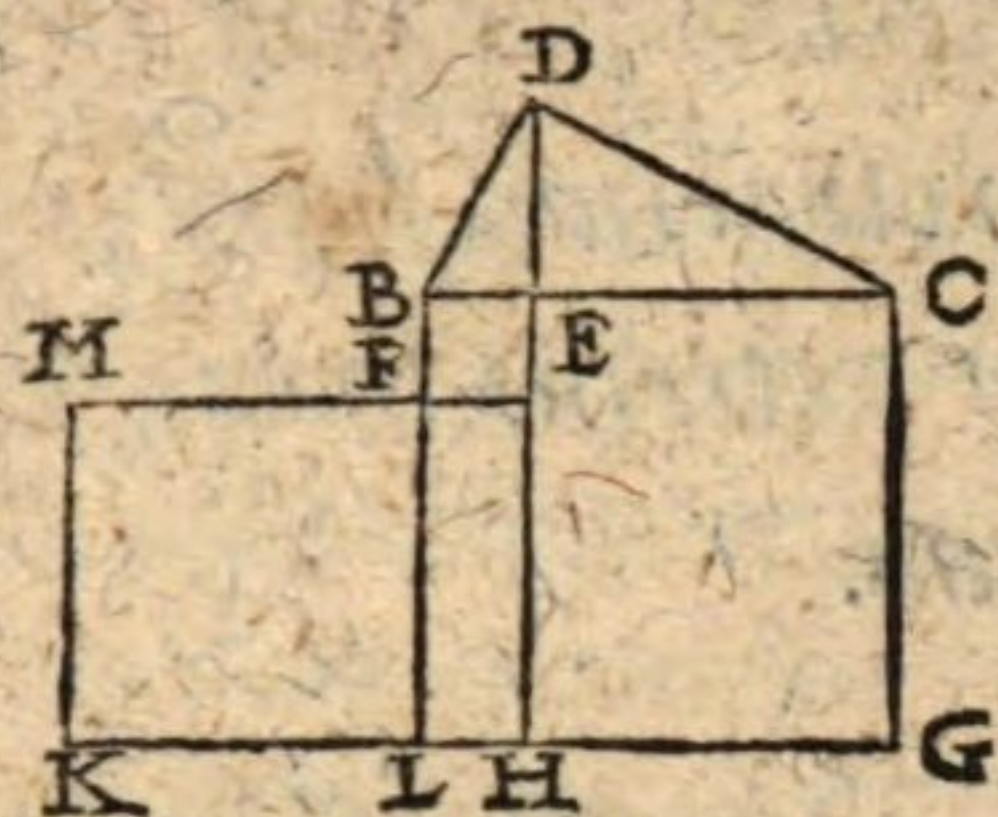


Sit ambligonium BCD , cuius C angulus obtusus sit, extendatur latus BC in E donec perpendicularem ex D cadentem excipiat. Quoniam de BD quadratum, quadratis DF , BH æquatur, & quadratum de CD , quadratis DF , CG æquatur per 47.1. evidens est, quadratum de BD , quadratis DF , CG , CL , quæ fiunt à lateribus DC , CB obtusum angulum comprehendentibus, maius esse rectangulo bis comprehenso [nempe KG , KL] & ab uno laterum [ut BC] quæ sunt circa obtusum angulum; in quod BC cum protractum fuerit in E , cadit perpendicularis DE , & ab assumpta exterius linea CE , sub perpendiculari prope angulum obtusum. Nam fiat quadratum BH , & ducatur perpendicularis CK , fiantque quadrata CL , CG : perspicuum est, quod GH , æqualis sit BC , & LM , CE . Rectangulum itaque KG lineis, BC , CE æqualibus comprehenditur, ut & KL .

PROP. XIII.

In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab uno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta

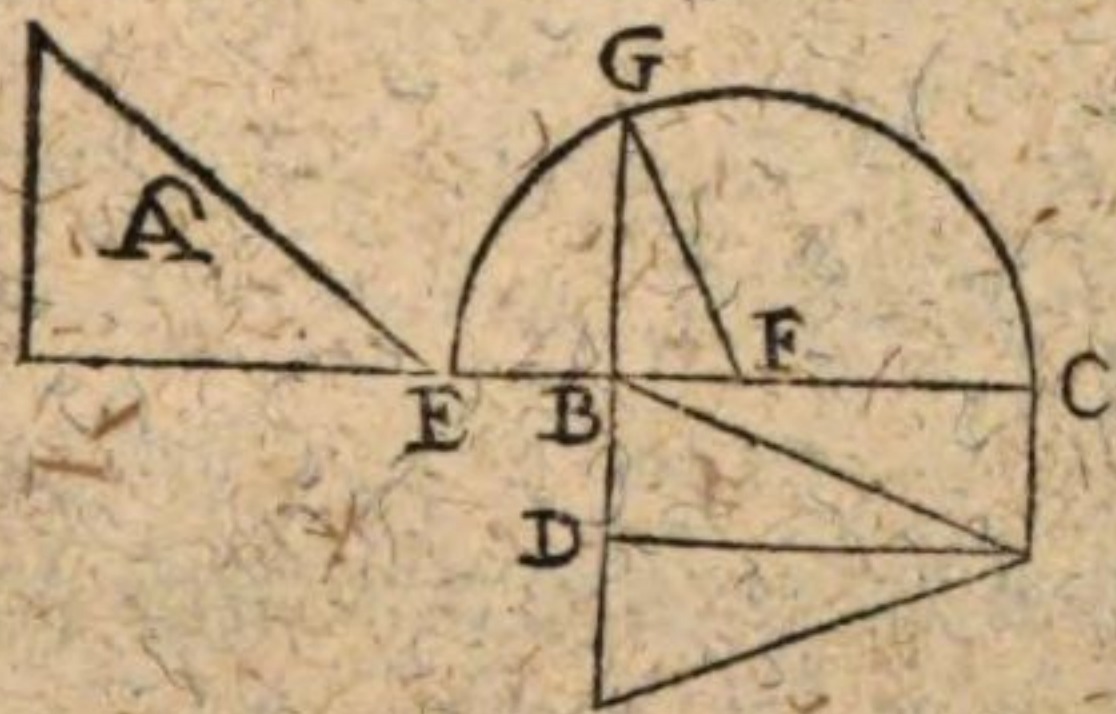
*sumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum
angulum.*



Oxygonium fit BCD , subtendat BD angulum acutum C , ex D cadat perpendicularis DE super BC , & quadratum BG super eandem erigatur, extensa DE in H fiat quadratum FE super BE positum. Liquet ex 47.1. quadratū de BD , quadratis de DE , EB æquari. Sed quadratum de BC , nempe BG multo maius est quadrato de BE , [hoc est, EF] gnomone CHF ; & quadratum de DC longè maius est, quadrato de DE ; quadrato de EC , (hoc est FK , quod nos ponimus descriptum esse super FL æquali EC .) Sed rectangulum EG comprehensum est sub CG five BC & EC , quæ inter angulum acutum C , & perpendicularem iacet. Est & alterum rectangulum MH sub eisdem lineis comprehensum, cū HL , æqualis sit BE , & KL , LF & LF , EC per constructionem. Ergo & HK , æqualis BC , & MK , EC . Quadratum itaque de BD minus est quadrato de BC , & de CD , duobus rectangulis EG , MH .

PROP. XIV.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.



Datum rectilineum A sit, cui parallelogrammum in dato recto angulo æquale ponatur per 45.1. & sit CD . extendatur CB in E , ita ut BE , BD æquales sint, æquibisecetur EC in F , à quo tanquam centro, semicirculus EGC describatur & producat DB donec incidat in circumferentiam, & ducatur GF . Quoniam igitur EC secta est æqualiter in F , & inæqualiter in B ; rectangulum sub CB , BE comprehensum cum quadrato de BF , quadrato

drato de FE [aut de GF suo æquali] æquabitur per 5. Sed & quadratum de GF æquatur quadrato de GB & BF (angulo GBF per constructionem recto existente) Evidens est rectangulum CD sub CB, BE cum quadrato de BF æquale esse quadratis de GB, BF. Ablato quadrato communi de BF, rectangulum CD & quadratum de BG inter se æquabuntur.

FINIS SECUNDI.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

TERTIVS.

Absolutissimæ perfectissimæque figuræ proprietates & naturam explicat hic liber, quo etiam nomine reliquis duobus præferendus, cum *Scientiarum præstantia ex subiectorum dignitate pendeat*. Vtilis ad chordarum arcuumque in circulis præcisionem, cum quæ sit angulorum, eadem quoque arcuum & chordarum inter se ratio. Contactus & intersectiones duorum circulorum, item diametri aliarumque linearum in circulo ductarum, indolem exponit. Quomodo duo puncta in corpore solido opposita inveniuntur, declarat. Instrumentorum Astronomiæ, alijsque artibus inserventium, compositionem haud parum iuvat.

DEFINITIONES.

1. *Æquales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum, quæ ex centris, rectæ æquales sunt.*
2. *Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producat, circulum non secat.*
3. *Circuli sese mutuo tangere dicuntur; qui se mutuò tangentes, sese mutuò non secant.*

4. In circulo æqualiter distare à centro rectæ dicantur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas cadunt, sunt æquales. longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.
5. Segmentum circuli figura est, quæ sub recta & circuli peripheria comprehenditur.
6. Segmenti angulus est, qui sub recta & arcu comprehenditur.
7. In segmento angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos eius rectæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ: is, inquam, angulus ab adiunctis illis rectis comprehensus.
8. Cum angulum comprehendentes rectæ lineæ aliquam assument peripheriam, illi angulus insistere dicitur.
9. Sector circuli est, cum ad centrum eius constitutus fuerit angulus; comprehensa nimirum figura, & à rectis angulum continentibus & à peripheria ab illis assumpta.
10. Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales, aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

P R O P. I.

Dati circuli centrum invenire.



In circulo dato, recta B C ducatur, quæ æquibisecta in H, puncto sectionis perpendicularis erigatur utrinque terminata in peripheria, quæ æquibisecetur in F: si F centrum circuli non fuerit ponatur G esse, & ducantur G B, G H, G C. Quoniam ergo B H, C H inter se æquantur, &

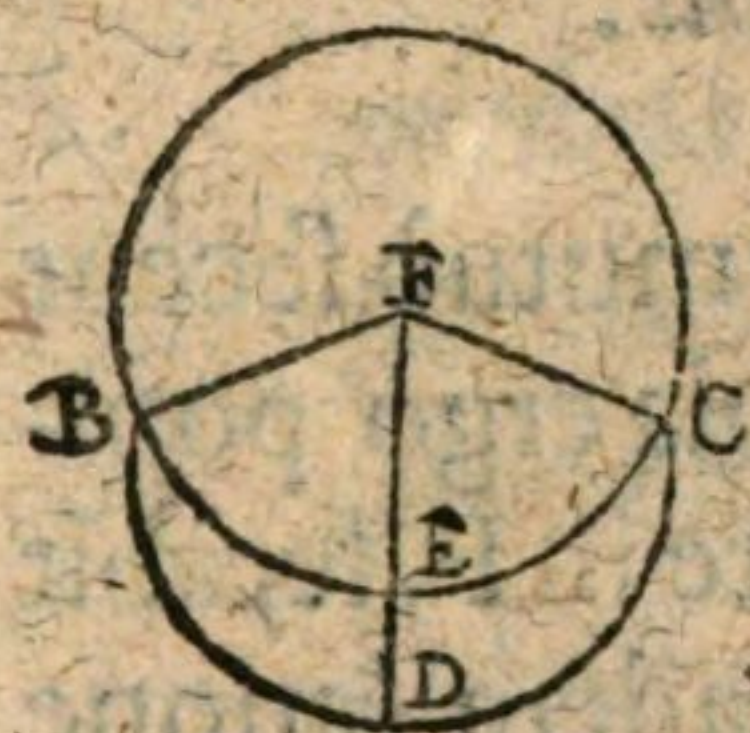
tur, & HG utrique communis est, & bases BG, GC inter se æquales (utpote à centro ductæ) anguli quoque BHG, CHG æquales erunt per 8. 1. ideoque recti. Erat autem & angulus BHF ex constructione rectus. Igitur anguli BHF, BHG pars & totum æquales erunt, quod est absurdum. Est ergo F verum circuli centrum.

Corollarium.

Si recta rectam ad angulos rectos in circulo æquibifecet, in secante centrum erit circuli.

PROP. II.

Si in circuli peripheria duo quælibet puncta sumpta fuerint, recta quæ ad ipsa adiungitur, intra circulum cadet.

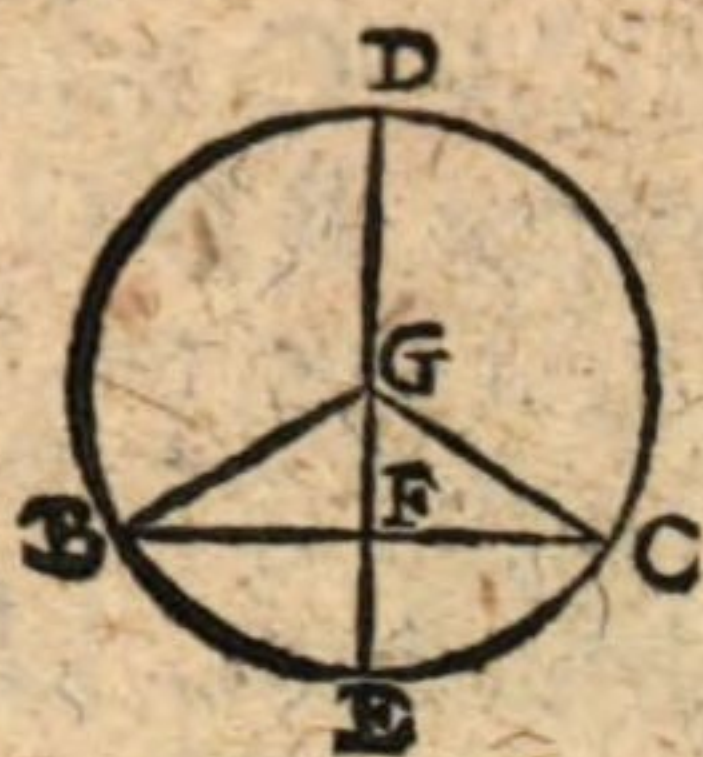


Quælibet puncta B, C in circuli dati peripheria sumantur, si ex B in C ducta recta non cadit intra circulum, extra cadat, & sit BDC. Invento F centro per 1. ducantur FB, FC & FD quæ secet circumferentiam in E. Quoniam ergo FB, FC latera æqualia sunt, cum à centro ducantur, anguli per 5. 1. FBD, FCD æquales erunt. Est autem FDB, angulo FCD maior per 16. 1. Igitur & FBD angulo, maior erit idem FDB angulus. Quare recta FB maiori angulo FDB opposita, [hoc est, recta FE sibi æqualis] maior erit per 19. 1. quàm recta FD minori angulo DBF opposita, pars quam totum, quod est absurdum. Non ergo recta ex B in C ducta, extra circulum cadet, sed intra.

PROP. III.

Si in circulo recta quædam per centrum extensa, quandam non per centrum extensam æquibifecet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secat, eam quoque æquibifecabit.

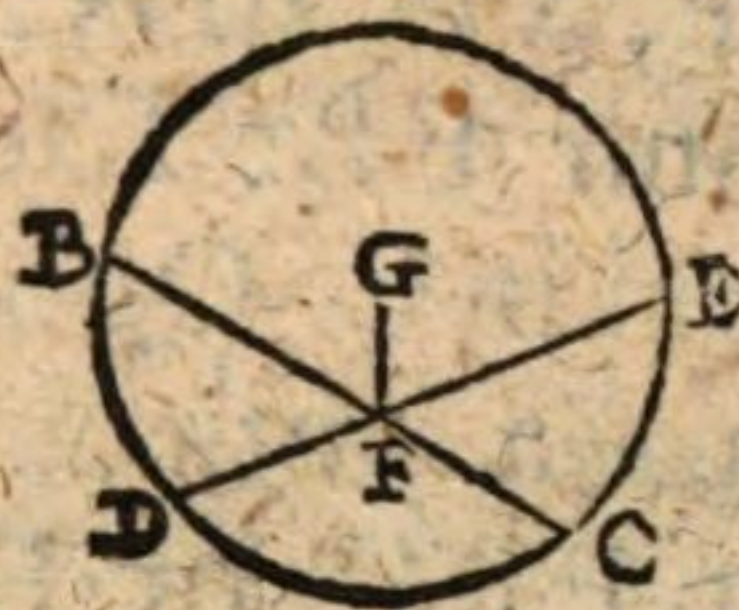
In circulo recta DE per centrum G extensa, rectam BC
E 3 non



non per centrum extensam æquibifecet in F, ducanturq; GB, GC. Quoniam duo trian- gula æquiangula sunt, ergò & GFC, GFB anguli æquales, & per consequens recti. Sit deinde BC, rectâ DF secta ad angulos re- ctos. Quoniam ad basin anguli B & C sunt æquales, & GFC, GFB quoque *per hypothesin*, & latera GB, GC sunt æqualia; Etiam reliquus angulus reliquo angulo æqualis erit & latera lateribus *per 26. 1.* quare & BF, FC æquales.

PROP. IV.

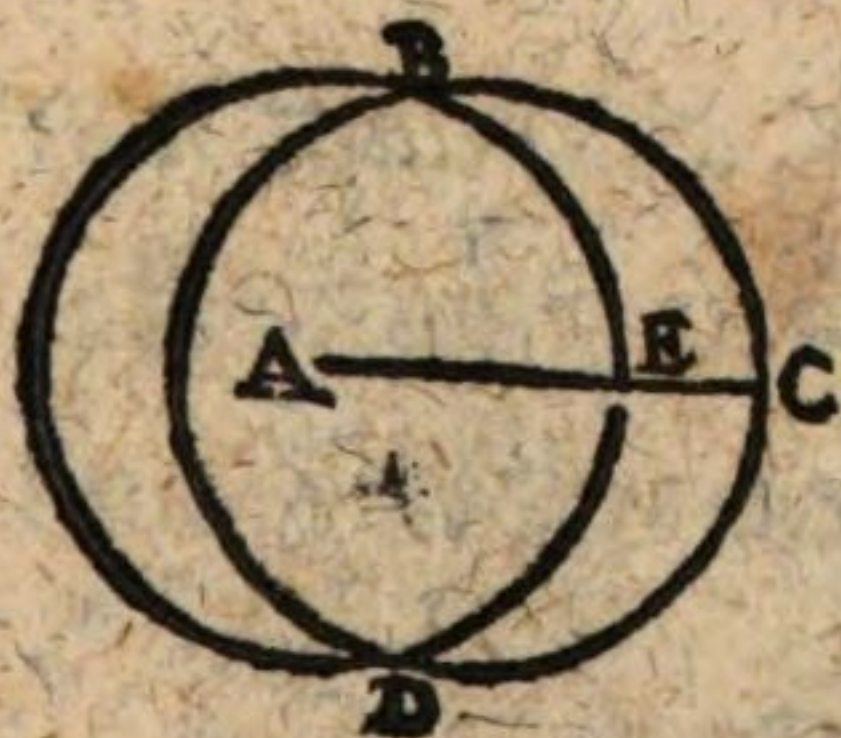
Si in circulo duæ se rectæ mutuò interfecent, non per centrum extensæ; sese mutuò non æquibifecabunt.



Rectæ BC, DE in circulo sese mutuò secant in F. centro G ducatur GF. Quia ergò poni- tur GF rectam BC æquibifecare in F, secabit eam ad angulos rectos *per 3.* Eadem ratione DE secabitur, cum ponatur æquibifecari in F. Quare rectus angulus GFE, recto angulo GFC æqualis erit, pars toti, quod est absurdum.

PROP. V.

Si duo circuli sese mutuò secant, non erit illorum idem centrum.

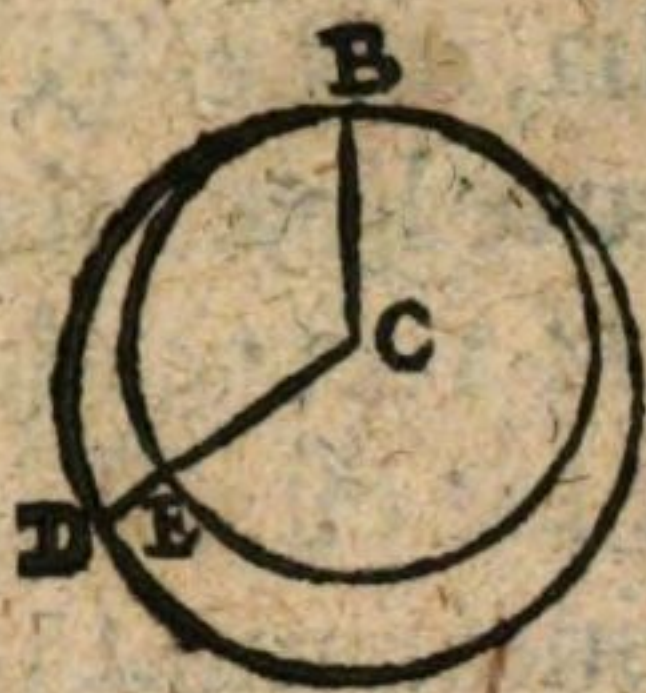


Duo se mutuò circuli secant in B & D: si A centrum est amborum, ducatur AB, AE, AC: erunt ergò tres illæ rectæ *per 15. def. 1.* æquales, pars & totum, quod est absurdum.

PROP.

PROP. VI.

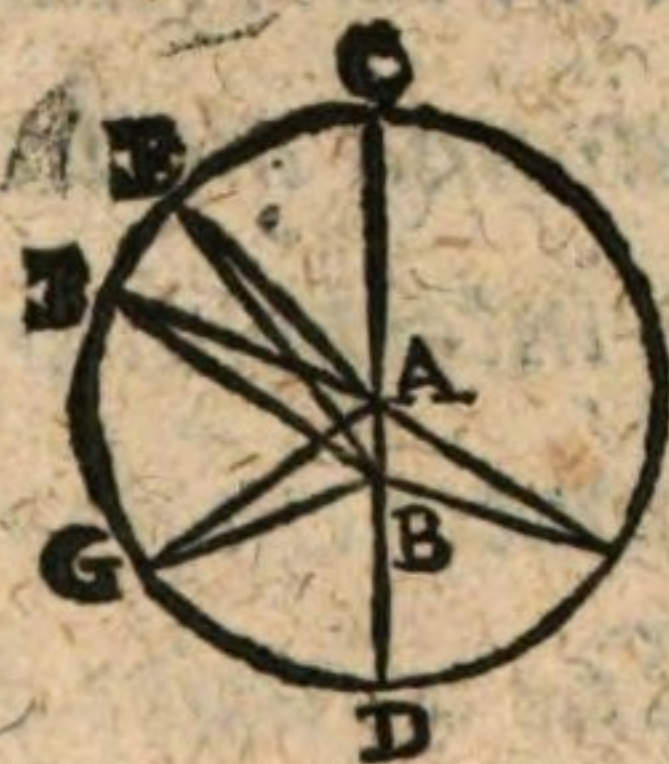
Si duo circuli sese mutuò interius tangant, eorum non erit idem centrum.



Tangant se circuli interius in B; si C utriusque centrum fuerit, ductæ CB, CE, CD, æquales erunt, pars & totum, quod est absurdum.

PROP. VII.

Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circumferentiam quædam rectæ cadant; maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est. Duæ autem solùm rectæ æquales ab eodem puncto in circumferentiam cadunt ad utrasque partes minimæ vel maximæ.

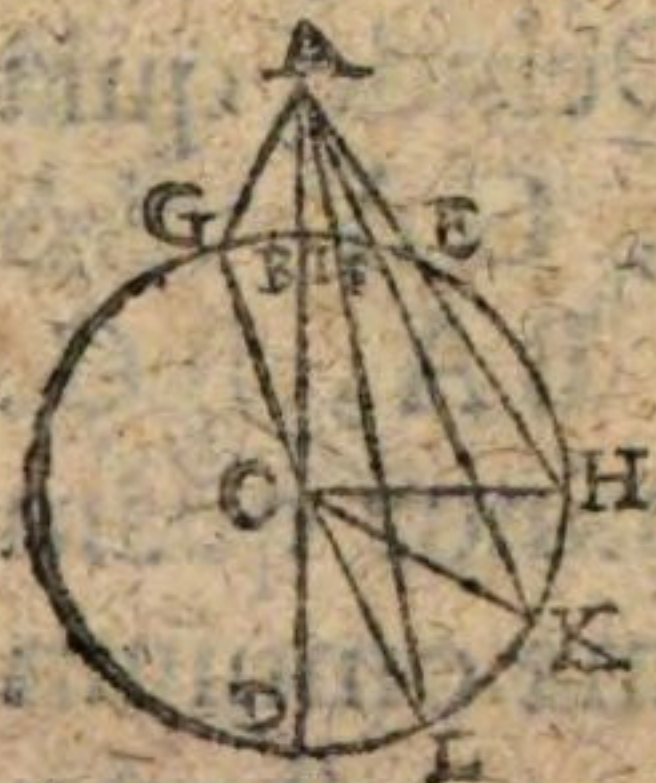


In diametro CD, cuius centrum A sit, sumatur punctum quodcunque B, præter centrum, à quo cadant in circumferentiam quotcumque lineæ BE, BF, BG, ducanturque semidiametri AE, AF, AG. Quia duo latera AE, AB, latere BE maiora sunt per 20. I. BC verò duobus illis æqualis est; erit BC maior quàm BE & quàm BF, vel BG vel BD. Quare BC maxima est omnium quæ ex B in peripheriam cadunt, cum perpetuo æqualis sit duobus trianguli lateribus. Deinde, quia latus GA duobus lateribus BA, BG minus est, GA verò AD æqualis; erit quoque AD minor duobus BA, BG. Comuni BA dempta, remanebit adhuc BD minor quàm BG, & quàm BF, BE, BC. Quare BD minima omnium est quæ

est quæ ex B in circumferentiam cadunt. Rursus, cum EA, ab æquentur FA ab, angulus verò EAB angulo FAB maior est; basis quoque EB basi FB maior erit per 24. 1. & sic consequenter FB, maior GB. &c. Fiat angulo BAG, altera parte, angulus BAH æqualis ducta BH. Quia anguli æquales sunt, & latera circa æquales angulos æqualia, rectæ GB, HB inter se æquales sunt per 4. 1. ex utraque parte linæ minimæ BD, vel maximæ BC. Iam si ex B supra H recta cadat, maior erit quam BH, quia maximæ BC vicinior est: si infra, minor: quia remotior est à maxima, & vicinior minimæ ut ostensum est. Nulla itaque alia ab eodem puncto B ducta his BG, BH æqualis esse poterit, quare solæ illæ æquales fuerint.

PROP. VIII.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum quedam rectæ ducantur, quarum una quidem per centrum transeat, reliquæ verò ut libet: in peripheriam cavam cadentium rectarum maxima est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: in convexam verò peripheriam cadentium rectarum minima quidem est illa, quæ inter punctum & diametrum interponitur; aliarum autem, ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad utrasque partes minimæ vel maximæ.

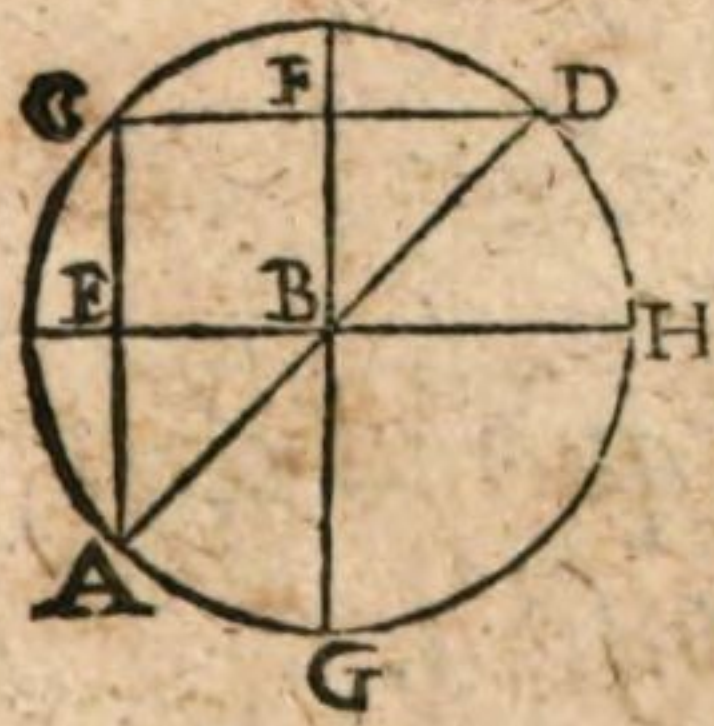


Puncto A extra circulum, linæ circulum secantes ducantur, quarum AD per C centrum transeat, reliquæ AL, AK, AH, utcunque; ducantur etiam semidiametri CI, CF, CE, CH, CK, CL. Quoniam igitur duabus CA, CL æqualis

æqualis AD est, maior erit AL recta, *per 20.1.* Et quia ac , CL æquantur ca CK ; angulus verò ACL angulo ACK maior est; basis quoque AL basi AK maior erit *per 24.1.* & sic de reliquis. Rursus quia AI , CI , sunt AC maiores; ablatis CB , CI æqualibus, relinquetur AB minor quam AI ; & sic AF quàm AE . Et quia intra triangulum AFC duæ rectæ IA , IC ab extremitatibus lateris AC ducuntur, quæ minores sunt, quàm FA , FC *per 21.1.* æqualibus CI , CF demptis, relinquetur AI minor quàm AF , ita quoque de cæteris. Postremò ACI angulo, ACG angulus æqualis ponatur, ducta GA . Quia anguli & latera æqualia sunt, bases quoque AI , AG æquabuntur: nec aliæ duæ rectæ his æquales poni possunt, remotiores enim longiores; viciniore, breviores erunt, ut demonstratum est.

PROP. IX.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, ab eoque puncto ad circumferentiam cadant plures quam duæ rectæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

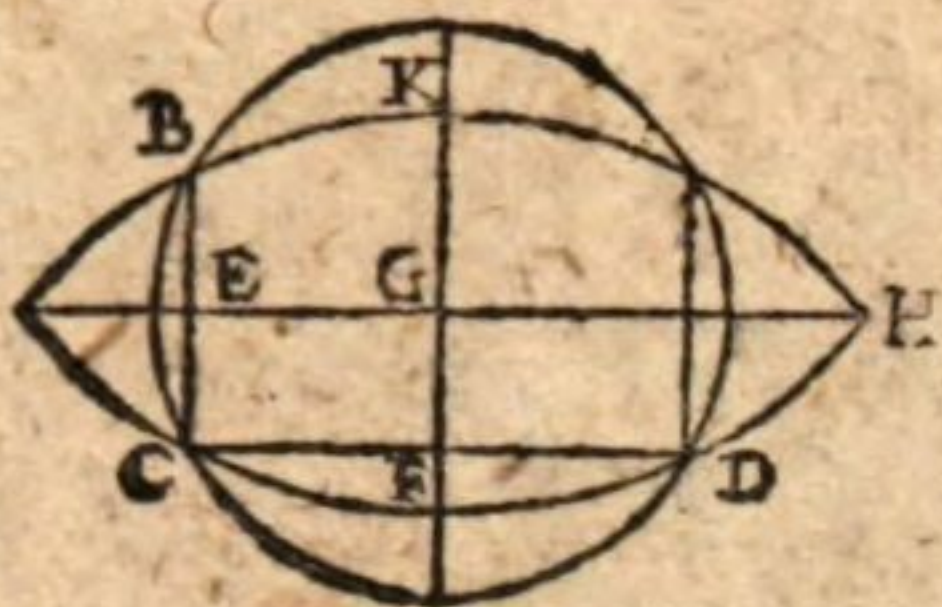


A puncto accepto B plures rectæ, BA , BC , BD , æquales inter se in circumferentiam cadant: ducta CD æquibifecetur in F . Quoniam duo triangula BFD , BFC æquiangula & rectangula sunt, *per 8.1.* recta FG super CD , ad angulos rectos collocata erit, & in eadem FG centrum erit circuli *per 3*: & æquibifecta AC , ducta EBH , contenebit in se centrum circuli. Iam quia B commune intersectionis punctum rectarum FG , FH est, erit & B centrum circuli.

PROP. X.

Circulus circum in pluribus, quàm duobus, punctis non secatur.

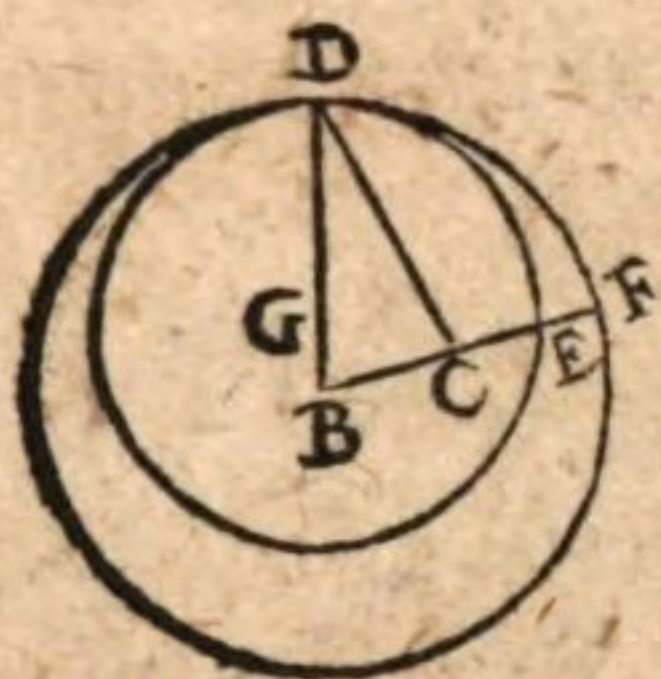
Duæ se peripheriæ in tribus (si fieri potest) punctis BCD secant,
F



secant, ductæ CB , CD æquibifecentur in E & F , è quibus perpendiculares erecti FK , EH . communis sectio G centrum erit duarum circumferentiarum secantium, quod est contra $\S$.

PROP. XI.

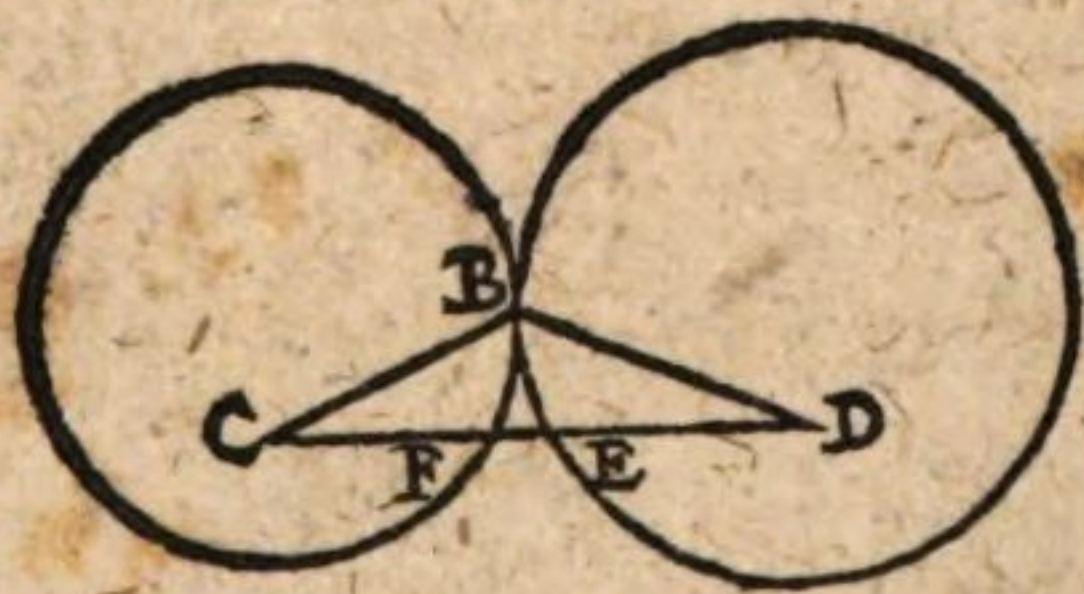
Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta & producta, in contactum circulorum cadet.



Duo se circuli interius puncto D tangant; B centro maioris, BD ducatur. Si in hac recta minoris centrum non fuerit, ponatur esse in C , ducaturque BC , CE , CD æquales; & CD , CB æquales EC , BC . Sed DC , BC maiores sunt, quàm DB , per 20.1. BE ergò maior, quàm BD fuerit: hoc verò falsum est: quia BE pars de BF , quæ æqualis est BD ; procedunt enim ab eodem centro B , & secant eandem circumferentiam DF per constructionem.

PROP. XII.

Si duo se circuli exterius contingant, recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.



Tangant se circuli in B , si recta, quæ eorum centra iungit, non transit per B , fit CD , ducatur CB , DB , quæ cum maiores sint, quam CD per 20.1. [sunt autem rectæ CB , CE , & DB , DF (cum C & D ponantur centra circulorum) æquales] erunt & rectæ EC , FD maiores quàm tota recta CD , quod manifestè falsum est.

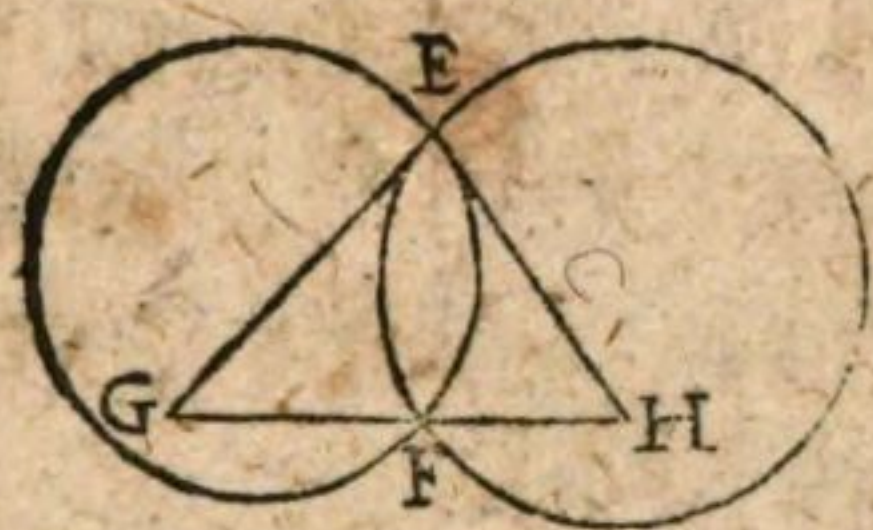
PROP.

PROP. XIII.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm uno, sive intus, sive extra trangat.



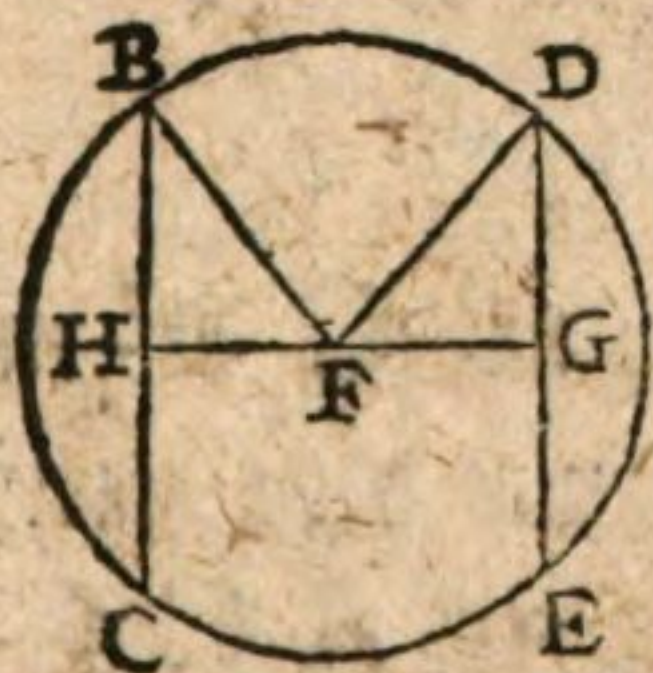
Si duo se circuli tangant interius in duobus punctis (si fieri potest) B, C, non habebunt idem centrum *per 5.* sint ergò centra A, D, ductâ AD, quæ producta in punctum contactus B cadet *per 11.* ducatur & AC quæ æqualis sit AB, & DC æqualis DB, à communi centro D ductæ. Quia ergò DB, DC æquales sunt, & AD communis, erunt æquales rectæ AC contra 20.1.



Si exterius se tangant duo circuli in E & F illorumque centra GH fuerint; transibit GH per contactum E; atque per F, *per 12.* Erit ergò GEH æqualis GH contra 20.1.

PROP. XIV.

In circulo æquales rectæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.



In circulo cuius centrum F sit, æquales rectæ BC, DE ducantur: cadant perpendiculares FH, FG ex F, quæ rectas BC, DE in partes æquales secabunt *per 3.* ducantur etiam FB, FD. Quoniam *per 47.1.* quadrata de BF, & de FD quadratis de BH, FH, & de dg, fg æquantur: duobus æqualibus de BH, DG ablati relinquentur æqualia quadrata de FH, FG: æqualiter ergò HF, GF distant à centro *per 4. defin.*

Corollarium.

PROP. XVII.

PROP. XVIII.

Tangat DC circulum in C, centro A ducatur AC. Si ACD
F 3 angulus



angulus rectus non fuerit, erigatur alia, & sit DA, super DC ad angulos rectos. Quia ergo ADC angulus rectus est, AC, [hoc est, AI] maior fuerit quàm AD per 19. 1. pars toto, quod est absurdum.

PROP. XIX.

Si recta quæpiam circulum tetigerit, à contactu autem recta, ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.



Si recta BC circulum in puncto B tangat, à quo BD perpendiculariter erigatur: quæ si centrum non contineat, sed in E fuerit, ducatur EB, quæ perpendicularis erit ad BC per 18. Ergo rectus angulus EBC recto ABC æqualis erit, pars toti, quod est absurdum.

PROP. XX.

In circulo angulus ad centrum duplus est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

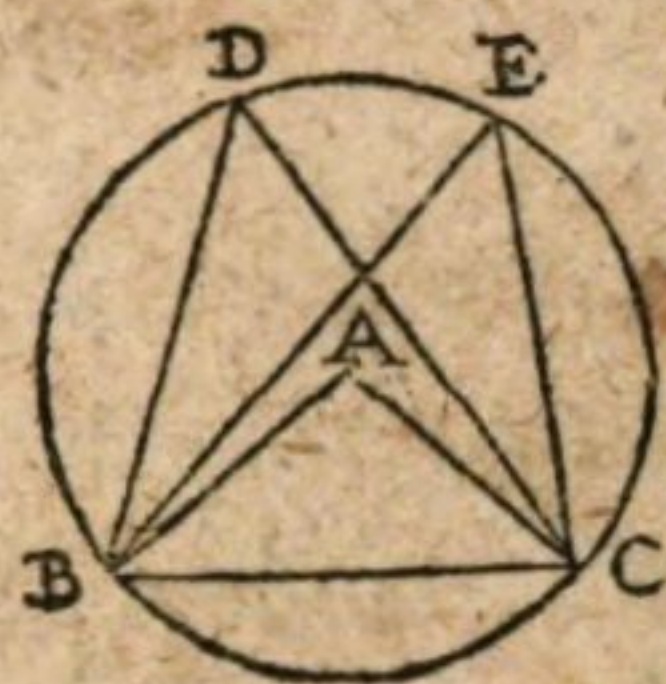


Super eadem basi EF angulus ad centrum EIF sit, angulus ad peripheriam EAF. Quoniam triangulum AIF isoscele est, & exterior angulus BIF æqualis est duobus IAF, IFA per 32. 1. erit BIF angulus duplus anguli IAF; & eadem de causa BIE angulus IAE anguli duplus. Totus ergo EIF totius EAF duplus erit. Sed si centrum extra lineas fuerit, & in angulo ECF ducatur CID. Angulus externus DIF duobus internis ICF, IFC æqualis est; ergo & duplus anguli ICF. Sic & DIE angulus duobus ICE, IEC æqualis, duplus erit

erit anguli ICE . Si ergò duplus DIE à duplo DIF tollatur, & simplex ICF à simplici ICF ; relinquetur EIF duplus reliqui ECF .

PROP. XXI.

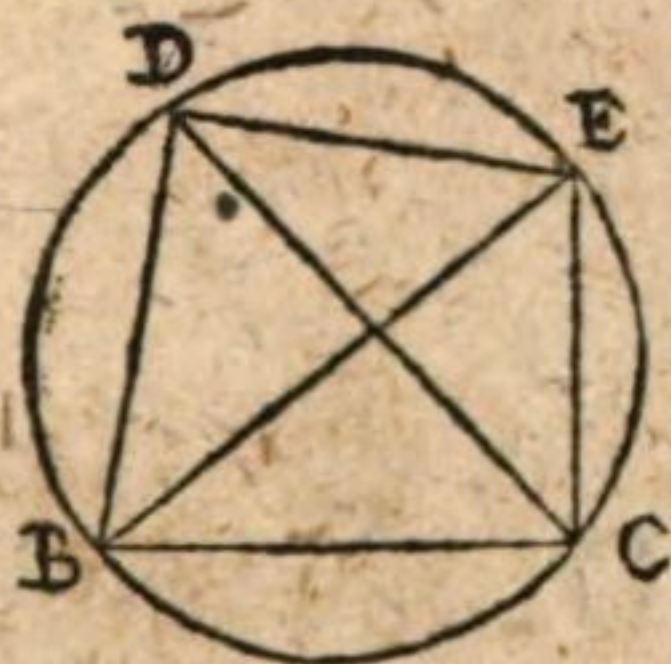
In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, inter se sunt æquales.



Segmentum circuli sit $BDE C$, anguli in eo sint D & E connectantur BC , & centro A ducatur AB , AC , quia D angulus, dimidius A anguli est, & E eiusdem A dimidius per 20. erunt D & E anguli inter se æquales per 7. axiom.

PROP. XXII.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex adverso, duobus rectis sunt æquales.

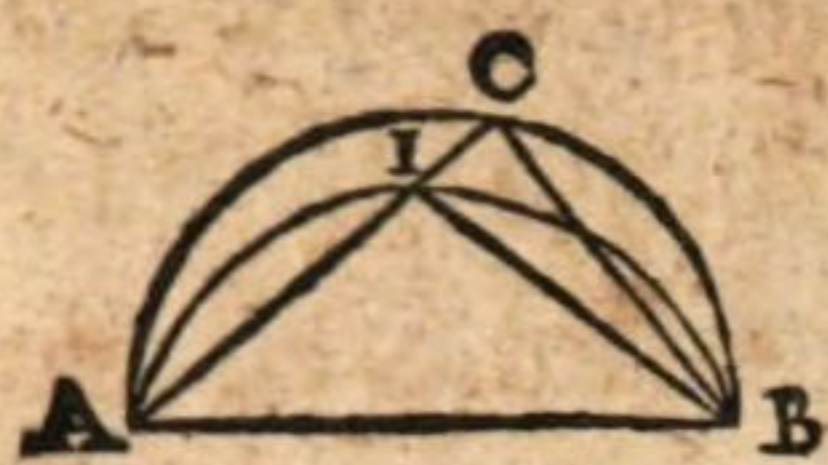


In circulo quadrilaterum $BCED$ inscribatur, ducanturque BE , CD . Anguli DBE , DCE æquales sunt, & EBC , EDC cum sint in eodem segmento per 21. Totus ergò DBC angulus, duobus CDE , ECD æqualis est: quare & totus DBC cum toto DEC angulo duobus rectis æquales erunt per 32.1. Eadem est de angulis BDE , BCE demonstratio.

PROP. XXIII.

Super eadem rectâ, duo circulorum segmenta similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

Super eadem recta AB similia & inæqualia [si fieri potest] circulo-



quod est contra 16. 1.

circularum segmenta AIB, ACB consti-
tuantur, ducaturque AC interiorem circum-
ferentiam secans in I & connectantur BC,
BI. Anguli C & I æquales erunt *per* 10. *defi.*

PROP. XXIV.

*Super æqualibus rectis, similia circularum segmenta,
sunt inter se æqualia.*



Super rectis AB, EB æqualibus con-
stituta sint æqualium circularū segmen-
ta ACB, EDB; Anguli C & D æ-
quales erunt *per* 21. Et super EB simi-
le aliud segmentum EIB [si fieri potest] ponatur; paucto I
quo interfecatur circumferentia EIB rectâ BD; ducatur FI.
Quia sectiones similes sunt, angulus I angulo C æqualis erit
ergò & angulo D, quod est contra 16. 1.

PROP. XXV.

*Circuli segmento dato, describere circulum,
cuius est segmentum.*

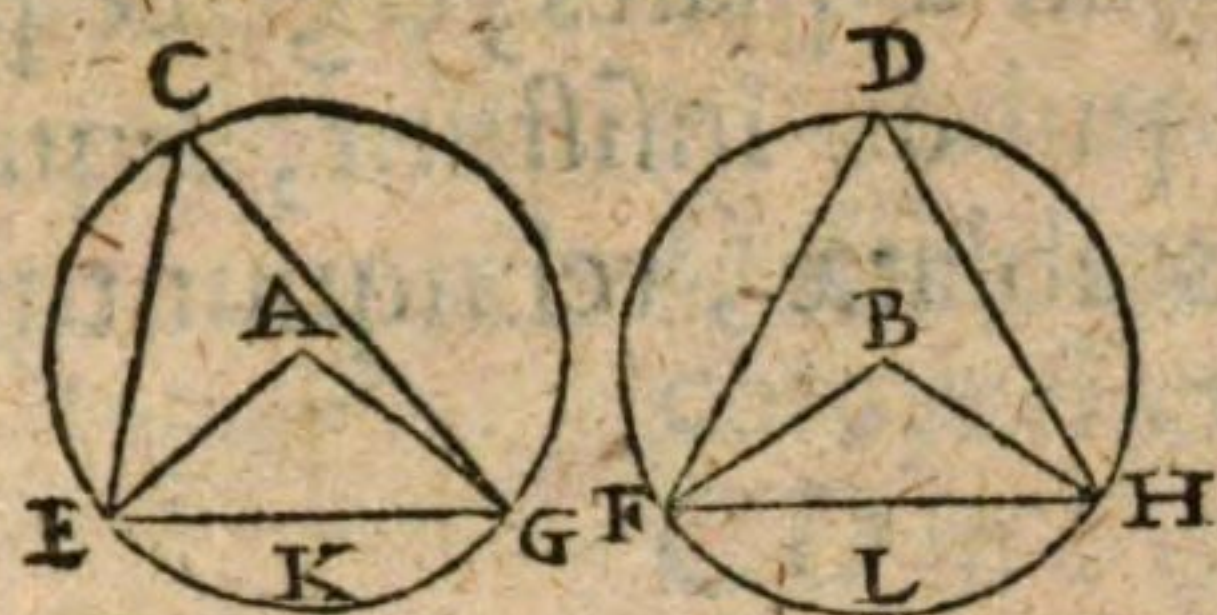


Segmentum datum BDC sit, in quo duæ
quæcunque lineæ, ut BD, CD, utcunque
ducantur non parallelæ, quæ æquibifecentur in
puncto E & F, è quibus perpendiculares EG,
FG erigantur. Patet *per* 1. centrum in duobus
illis perpendicularibus esse, nempe in puncto communi G. Po-
terit ergò ex centro G intervallo CG circulus perfici, cuius
BDC datum sit segmentum.

PROP. XXVI.

*In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs
insistunt,*

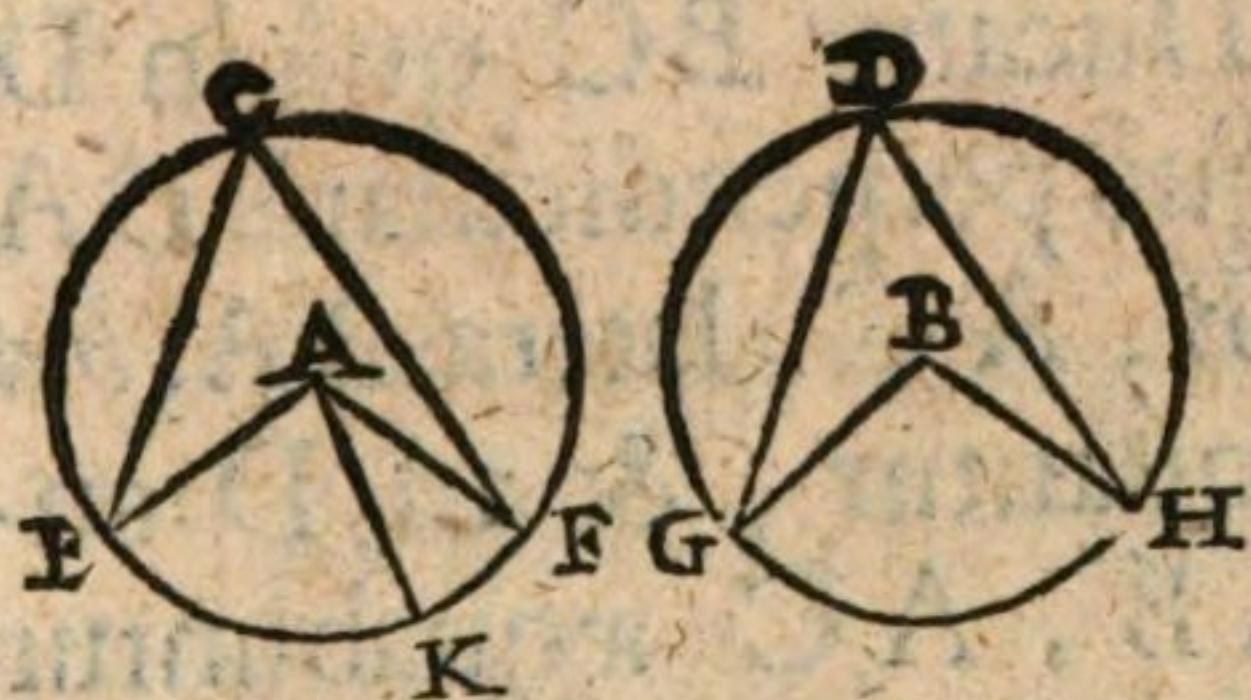
*insistunt, sive ad centra, sive ad peripherias constituti
insistant.*



Duo circuli æquales sint, & ad centra A, B, & ad circumferentias C, D, inter se anguli æquales sint. AE, *a g* lineis BF *b h* æquales, angulos comprehendentes æquales, sunt; æquales ergò erunt rectæ EG, FH *per 4.1.* Deinde quia C, D, anguli æquales sunt *per 20.* segmenta circulorum ECG, FDH *per 10. defin.* similia erunt. Sed segmenta ECG, FDH super rectas æquales, EG, FH inter se æquales sunt *per 24:* segmenta ergò reliqua ut & peripheriæ EKG, FLH æquales erunt.

PROP. XXVII.

*In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insi-
stunt inter se æquales, sive ad centra, sive ad periphe-
rias constituti insistant.*

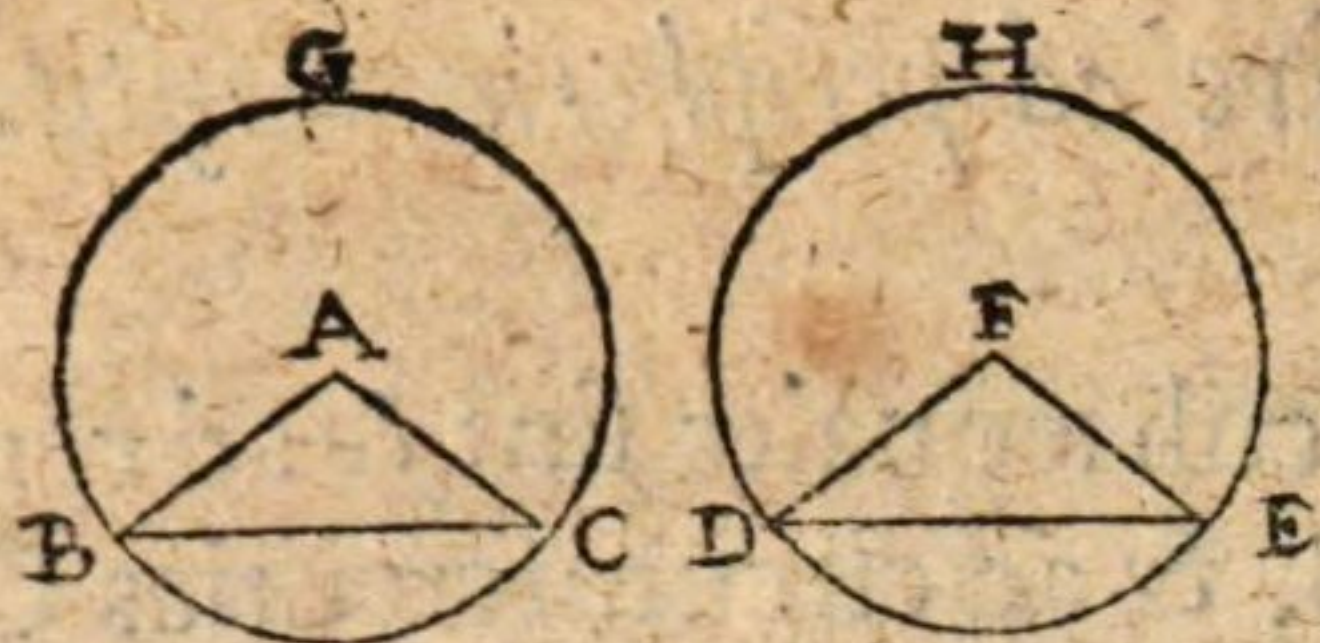


In æqualibus circulis æqualibus peripherijs EF, GH, anguli æquales C, D, insistant. Si ad centrum angulus B, angulo EAF minor fuerit, reddatur hic ei æqualis *per 23.1.* ducta AK. Circumferentia ergò EK, circumferentiæ GH æqualis fuerit *per 26:* sed ex hypothesi EF æqualis erat GH. ergò EK æqualis erit EF, pars toti, quod est absurdum; non ergò inæquales fuerint, ergò & horum ad centrum angulorum sub dupli C, D *per 20.* æquales erunt *per 7. axiom.*

PROP. XXVIII.

*In æqualibus circulis, æquales rectæ, æquales peripherias auferunt;
maiolem quidem maiori, minorem autem minori.*

In æqualibus circulis duæ rectæ æquales BC, DE sint, cen-
tris
G



erunt *per* 26 ; quæ à totis æqualibus ablatae , relinquuntur æquales BGC , DHE *per* 3. *axiom.*

PROP. XXIX.

In æqualibus circulis , æquales peripherias , æquales rectæ subtendunt. Vide schema præcedens.

In circulis & peripherijs æqualibus, duæ rectæ BC, DE subtendentes ponantur, ductis lineis ut prius. Quia latera AB ac lateribus FD *fe* æquantur : anguli verò A, F æquales *per* 27, bases quoque BC, DE æquabuntur *per* 4.1.

PROP. XXX.

Datam peripheriam æquibisecare.

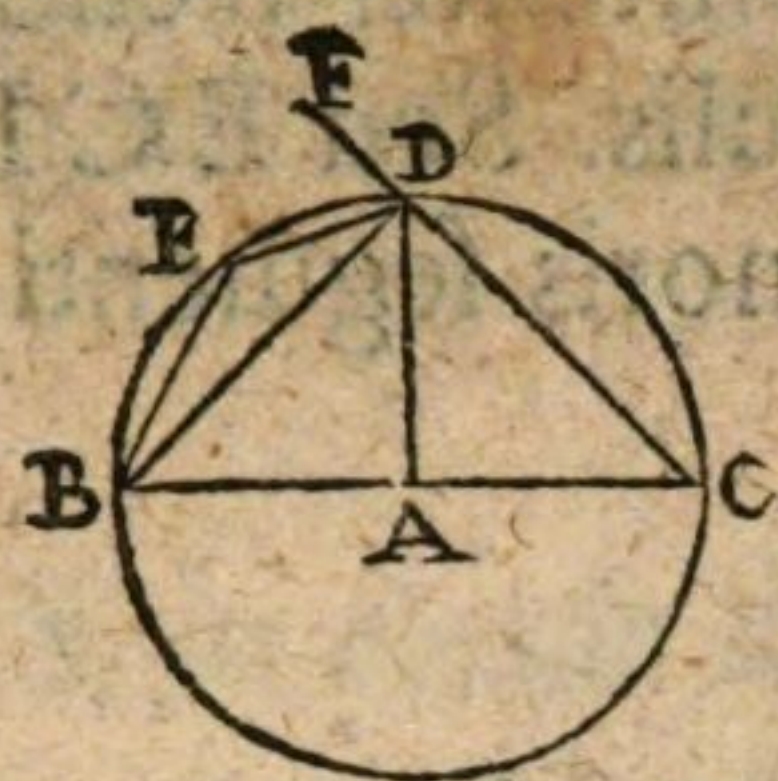


Peripheria sit BAC. Ducatur BC quâ in D puncto æquibisecta, ex quo perpendicularis DA erigatur, iungantur AB, AC, latera BA, *bd* lateribus CA, *dc* æquantur, & ad D anguli : bases quoque AB, AC æquabuntur *per* 4.1. & propterea peripheriæ AB, AC æquales erunt *per* 28.

PROP. XXXI.

In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est : qui autem in maiore segmento, minor recto ; qui verò in minore segmento, maior est recto. & insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

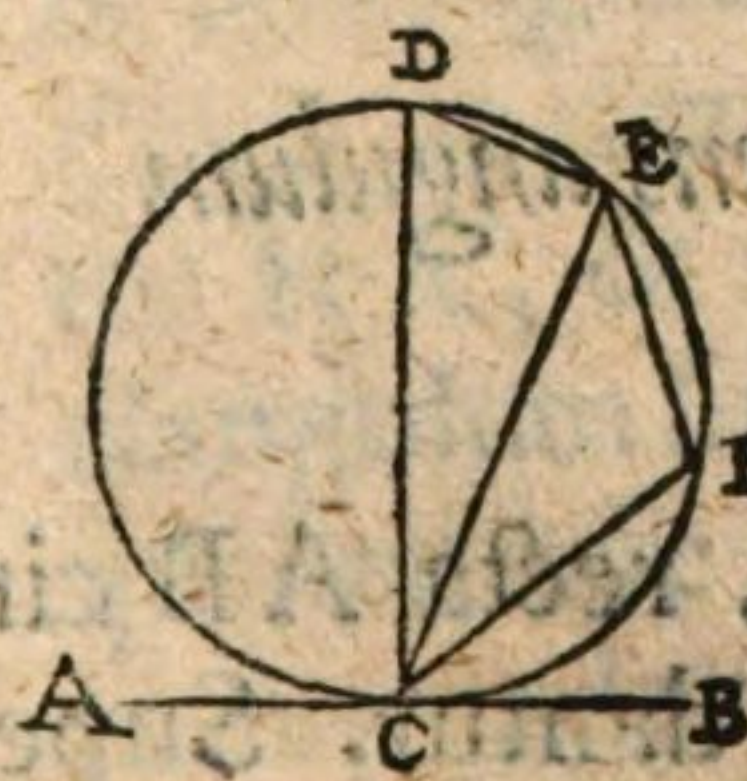
In circulo cuius centrum A sit, constituatur semicirculi angulus



lus $BD C$. ducatur diameter BC . Sit in maiori segmento DCB angulus, in minori DEB angulus: angulus ex maiori segmento mixtus rectâ BD comprehendatur, & arcu DC ; ex minori verò mixtus eadem BD comprehendatur, & arcu DE . Extendatur CD in F & ducatur AD . Quia anguli ACD , ADC per 5.1. æquales sunt, quemadmodum & ABD , ADB anguli; totus $BD C$ angulus æqualis erit DBC , DCB angulis, quibus duobus, externus FDE angulus æqualis est per 32.1. sunt igitur $BD F$, $BD C$ æquales & per consequens recti per 10. defi & 13 prop.1. Deinde maioris segmenti angulus DCB minor recto est; figurarum verò quadrilaterarum circulo inscriptarum, æquales sunt oppositi anguli duobus rectis per 22. ergò BED angulus recto maior est. Postremò angulus mixtus $BD C$, rectum comprehendens recto maior est, & ex minori segmento mixtus BDE minor est, quàm FDB , quare & recto minor.

PROP. XXXII.

*Si circulum tetigerit aliqua recta, à contactu autem producatu-
quædam recta circulum secans; anguli, quos ad contin-
gentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli se-
gmentis consistunt, angulis.*

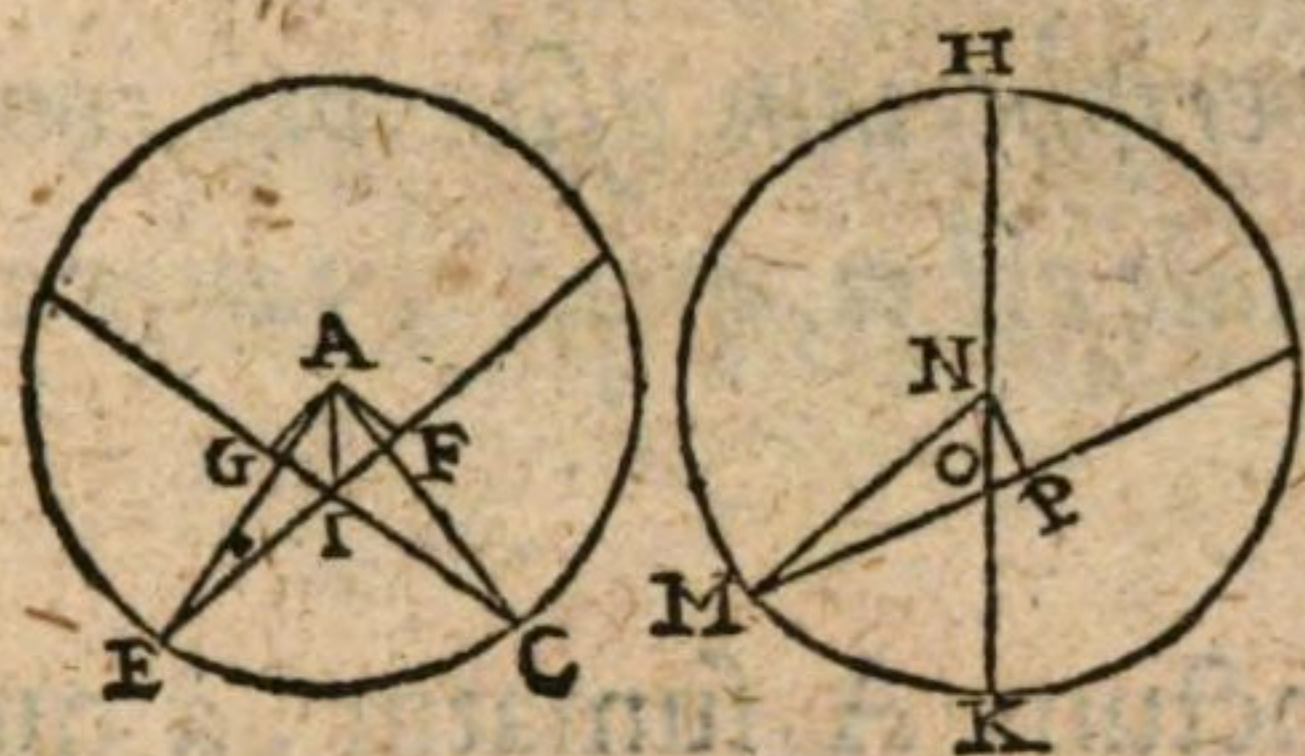


Recta AB , circulum in puncto C tangat, à quo CE circulum secans ducatur, erigatur CD ad angulos rectos, ductâ DE . Quia CED angulus rectus est per 31. ECD , EDC recto (hoc est BCD) angulo æquales erunt per 32.1. communi ECD ablato, qui in maiori segmento est EDC angulus, ECB æqualis relinquetur. Ducatur quoque FE , FC . Quia quadrilateri circulo inscripti oppositi anguli, æquantur duobus rectis

per 32. Si datus angulus DCB angulo æqualis poneretur, segmenti minoris DC angulus ei æqualis ostenderetur.

PROP. XXXV.

Si in circulo duæ se rectæ mutuò secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.



In circulo duæ se rectæ BC , DE mutuò interfecent in I . centro A perpendiculares cadant AG , AF , ducanturque AE , AC , AI . Quoniam AG , AF rectas BC , DE in partes æquales secant *per 3.* AI verò in inæquales: Rectangu-

lum sub BI , IC comprehensum cum quadrato de GI quadrato de GC æquabuntur *per 5.11.* sed *per 47. 1.* de CG , GA quadrata, de CA quadrato æquantur. Rectangulum igitur sub BI , IC , cum quadratis de GI , GA [hoc est, de IA quadrato] æquantur de AC quadrato. Ita quoque demonstratur, sub DI , IE rectangulum æquari quadrato de AE . Si commune de IA tollatur quadratum, rectangulum sub segmentis unius, æquale erit rectangulo sub segmentis alterius. Deinde si una tantum rectarum in circulo ductarum secetur inæqualiter, altera verò non, erit secta ad angulos rectos, & rectangulum sub inæqualibus segmentis, æquale erit quadrato de dimidia, ut colligitur *ex 14.11.* Postremò, si diameter HK , & altera recta LM se inæqualiter secent in O : rectangulum sub HO , KO cum quadrato de ON æquale erit quadrato de NK , five NM ; & rectangulum sub LO , MO cum quadrato de OP , quadrato de PM æquale erit. Sed quadrata de PN , PO quadrato de NO æquantur. Rectangulum ergò sub LO , MO cum quadrato de NO , æquale erit quadratis de PM , PN , [hoc est, quadrato de NM quod

quadrato de NK æquale est.] Si ergò commune quadratum de NO tollatur, duo rectangula sub HO , KO & sub LO , MO contenta, relinquuntur inter se æqualia.

PROP. XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: quod sub totâ secante, & exterius inter punctum, & convexam peripheriam assumptâ, comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à tangente describitur, quadrato.



Extra circulum punctum A sumatur, à quo cadant rectæ duæ, quarum altera AD circulum secet transiens per centrum C ; altera AE circulum tangat. Quoniam itaque per 6.11, rectangulum sub tota AD & apposita AB contentum, cum quadrato de CB [five CE] dimidia, quadrato de dimidia & apposita AC æquale est; & quadrata de AE , CE quadrato de eadem AC æqualia sunt per 47.1. communi quadrato de EC [five CB] ablato, quadratum de AE , rectangulo sub AD , AB contento æquale erit. Deinde si circulum secans recta AF per centrum non transeat, super quam ex centro perpendicularis cadat HC . Ergò FI secta est in partes æquales per 3. ducatur IC . Quoniam igitur per 6.11. rectangulum sub AF , AI , cum quadrato de IH , quadrato de AH æquale est: cui commune quadratum de HC addatur. Iam sub AF , AI contentum, cum quadrato de AH , CH [hoc est quadrato de IC] æquale est, quadrato de AH & CH [hoc est quadrato de AC .] Sed quadrata de AE , CE æqualia sunt eidem quadrato de AC . Quadrata ergò de AE , CE æqualia sunt rectangulo sub AF , AI cum quadrato de CI , five

CI, [five CE] communi ablato, relinquentur quadratum de AE, & rectangulum sub AF, AI inter se æqualia.

PROP. XXXVII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub totâ secante & exterius inter punctum & convexam peripheriam assumptâ, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; incidens ipsa circulum tanget.



Puncto A extra circulum cadant rectæ, quarum una AC circulum secet, altera AD tangat; centro B ducatur BA, BD, puncto A ducatur AE, quæ tanget circulum per 17, ducaturque BE. Quia ergò ex hypothesi & per 36. rectangulum sub AC, AI contentum quadrato de AD æquale est, & per eandem idem rectangulum, quadrato de AE æquale est: Erunt ergò AD, AE inter se æquales. Itaque cum DA, d b lateribus EA, e b æqualia sint, basis verò communis, angulus ADB, angulo AEB recto æqualis erit per 8. 1. erit ergò & ipse rectus, & AD circulum tanget in extremitate Diametri BD per 16.

FINIS.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

QVARTVS.

Inscriptio & circumscriptio figurarū rectilinearum, vel polygonarū hoc libro proponitur. Docet enim quomodo una figura aliā inscribi vel circumscribi debeat. Ex hoc, tanquam fonte, tabulæ illæ insignes, *Sinuum*, *tangentium*, *secantium*, primum manarunt, quod & secunda commentarij nostri pars haud obscurè innuit, in qua singula latera figurarum circulo inscriptibilium Geometrice in numeris inventa exhibebimus. Satis ergò hic liber *Matheseos studiosis* commendatus erit, quod tam utilis præclarique inventi occasionem sublimibus ingenijs præbuerit. Nihil dicam de amplissimo eius in propugnaculis, in fortalitijs extruendis usu, quibus salus publica defenditur, aliena invadendi bona, ardor reprimitur, subditorum sæpè furor coërcetur, ut ob id ars hæc *vinculi universi* nomine decoranda mihi videatur. Sed cum alia huius quàm præcedentium tractatio sit, alijs quoque vocabulis utitur, quæ singula ob pleniorē sequentium intellectum, definit.

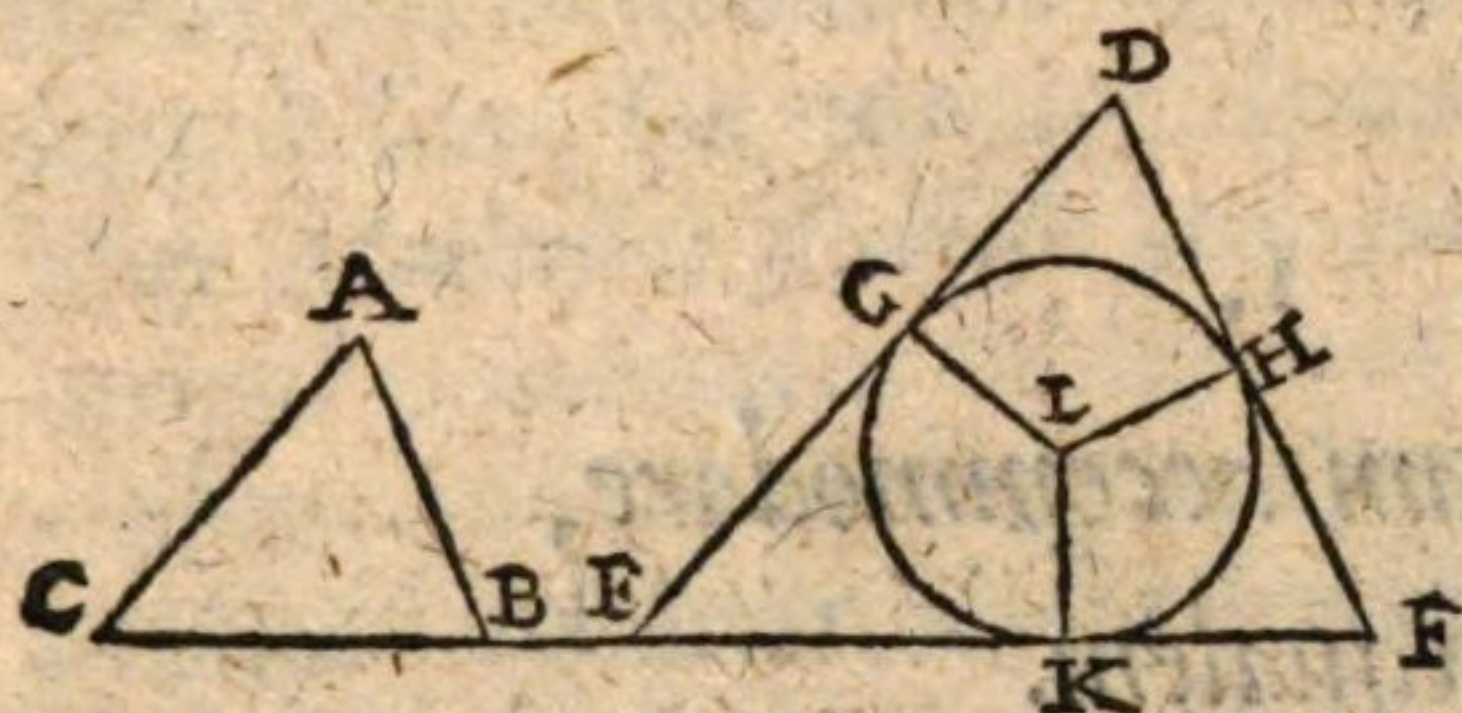
DEFINITIONES.

1. *Figura rectilinea in figurâ rectilineâ inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.*
2. *Figura circum figuram describitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.*
3. *Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriam.*
4. *Figura rectilinea circa circulum describi dicitur, cum singula*

C æqualis, ducaturque GH. Quoniam tres trianguli anguli duobus rectis æquales sunt *per* 32.1. GDH, angulo A æqualis erit. Sed H angulus EDG angulo [id est B] æqualis est *per* 32.111. Ergo & G, angulo FDH [hoc est C] æqualis est. Triangulum itaque GDH, in dato circulo, dato triangulo æquiangulum posuimus.

PROP. III.

*Circa datum circulum triangulum describere,
dato triangulo æquiangulum.*



Dato triangulo ABC æqui-
angulum circumscribendum
fit circulo dato, cuius centrum
L in quo GLK, *k l b* anguli,
æquales C, *b* exterioribus triā-
guli angulis ponantur: extre-
mitatibus G, H, K tres lineæ ED, FD, EF tangentes circu-
lum ducantur. Quoniam quadrilaterum EGLK circulo
inscribi potest *per conversam* 22.111. angulis G & K opposi-
tis, rectis existentibus, & GLK æqualis factus est C angulo.
Est ergo E angulus, ACB æqualis, cum ille, cum exteriori
duobus rectis æqualis sit *per* 13.1. eodem modo reliqui anguli
reliquis angulis ostenduntur æquales.

PROP. IV.

In dato triangulo circulum inscribere.



Dati trianguli ABC duo quicunque anguli
B, C æquibifecentur rectis quæ concurrant
in puncto G, à quo in singula latera per-
pendiculares GD, GE, GF cadant, quæ
æquales erunt *per* 4.1. cum quatuor trian-
gulorum æqualium & æquiangulorum ba-
ses existant æquales. Si ergo ex G interual-
lo GD

h GD circulus ducatur, tanget latera trianguli per 16. III.

PROP. V.

Circa datum triangulum circulum describere.

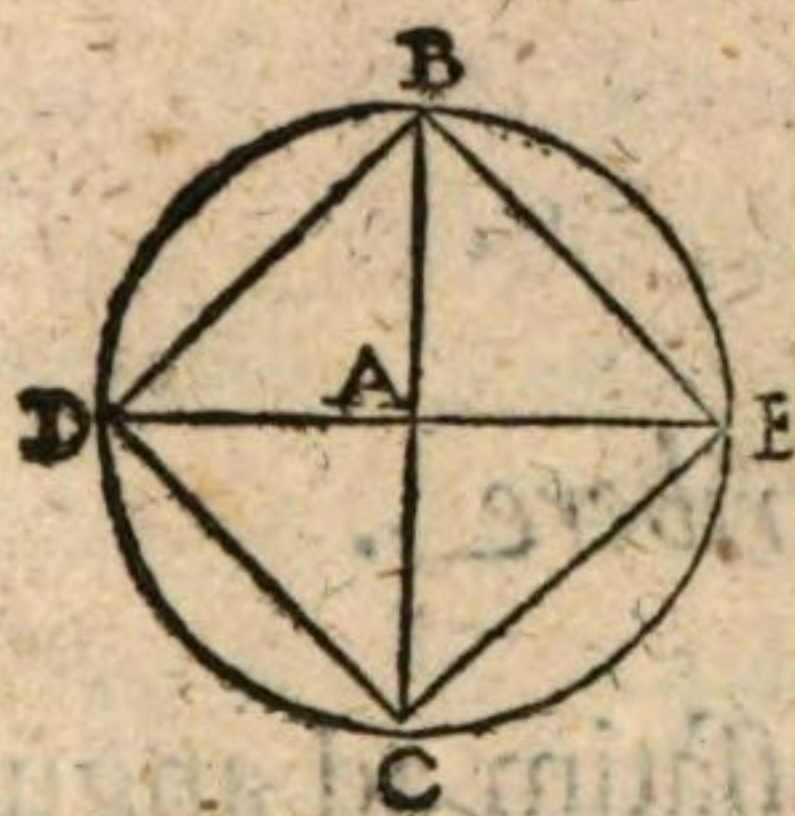


Dati trianguli ABC latera BC, AC æquibisecentur in E, D ex quibus perpendicularares DF, EF erigantur, coeunt in F, à quo tres rectæ FA, FB, FC ducantur. Duo triangula rectangula BEF, CEF æqualia sunt & æquiangula per 4. I. ergò FB, FC æquales, & ob eandem rationem FA, FB.

Si ergò ex F intervallo FB ducatur circulus, transibit per BCA puncta. idem fiet in omnibus rectangulis amblygoniis, & oxygonijs.

PROP. VI.

In dato circulo quadratum describere.

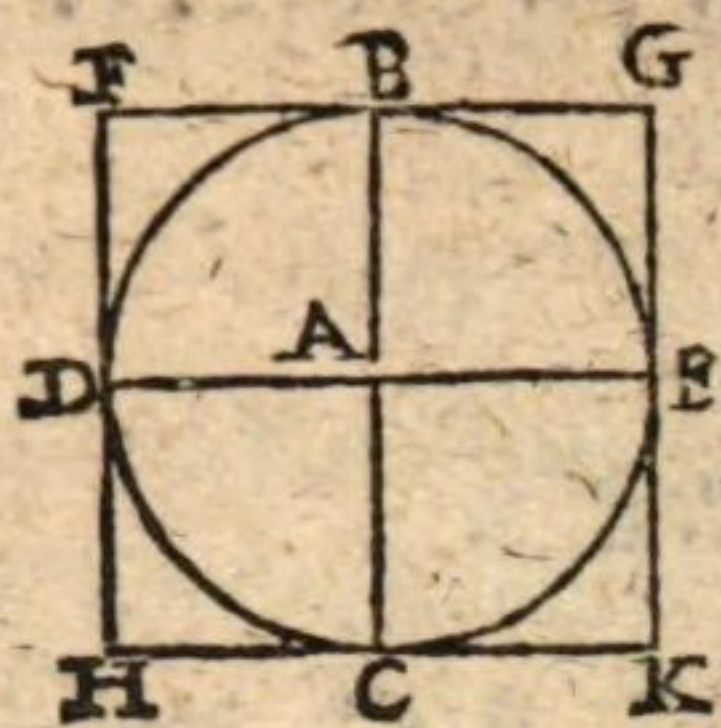


In dato circulo diametri BC, DE ductæ se interfecent ad angulos rectos in centro A; connectantur BE, CE, CD, BD. Quia quatuor triangula, rectangula, isoscelia, æquiangula, & æqualia sunt, bases quoque æquales sunt per 4. I. æquilatera ergò figura BDCE est. Sed quivis ad basin angulus semirectus est, ut DCA, ECA per constructionem. Totus ergò DCE rectus est, & sic singuli bini anguli: est ergò BDCE quadratum, circulo inscriptum.

PROP. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

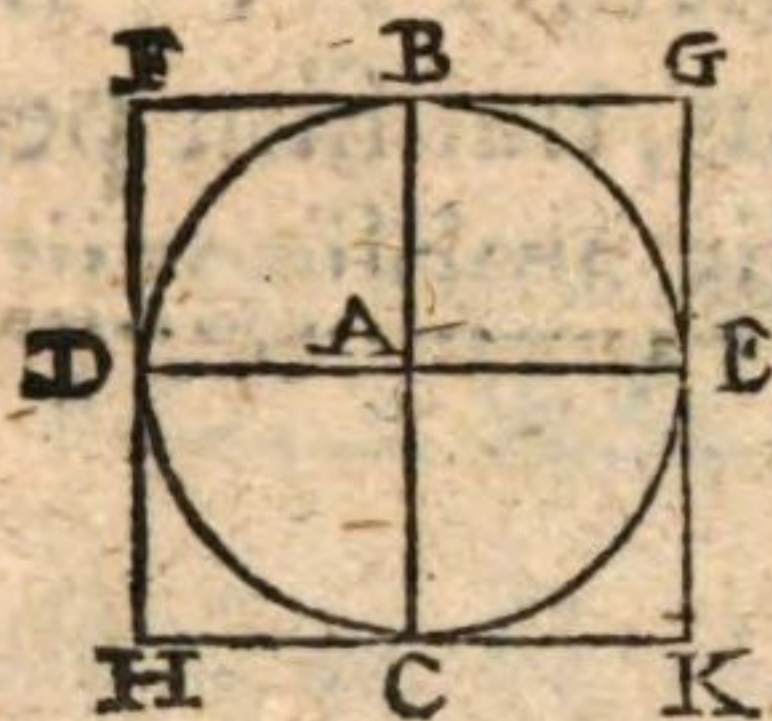
Duæ se diametri BC, DE in centro A secant ad angulos rectos, singulis extremitatibus perpendiculares FG, FH, KH, H 2 KH,



KH, KG erigantur. Quoniam ergo anguli ad A recti sunt, quemadmodum & qui ad B, D, C, E: quatuor anguli F, H, K, G, recti erunt *per* 34. I. est vero figura æquilatera, cum singula latera diametro æqualia sint. Quadratum ergo est FGHK circulo circumscriptum.

PROP. VIII.

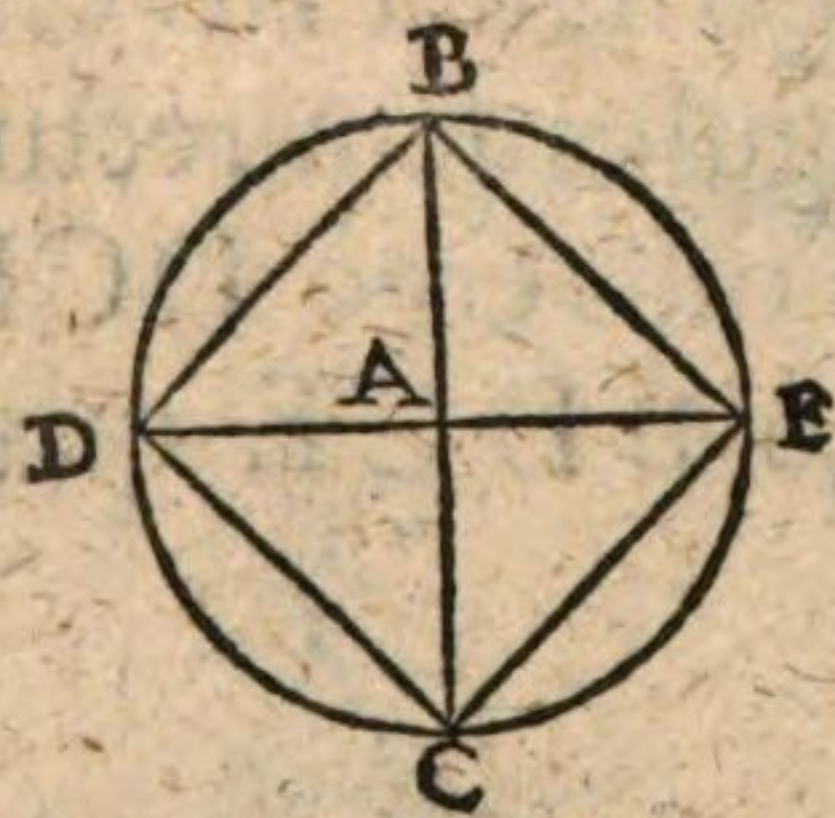
In dato quadrato circulum inscribere.



Quadrati dati latera æquibifecentur, ducanturque rectæ BC, DE, quæ se in A secant ad angulos rectos. Quoniam BC parallela est GK, sive FH, & DE parallela HK *per* 34. I. anguli qui ad F, H, K, G, sunt, recti sunt. Si ergo centro A, intervallo AB circulus describatur, tanget quatuor quadrati latera punctis B, D, C, E *per* 16. III. circulus ergo inscriptus est quadrato.

PROP. IX.

Circa datum quadratum, circulum describere.



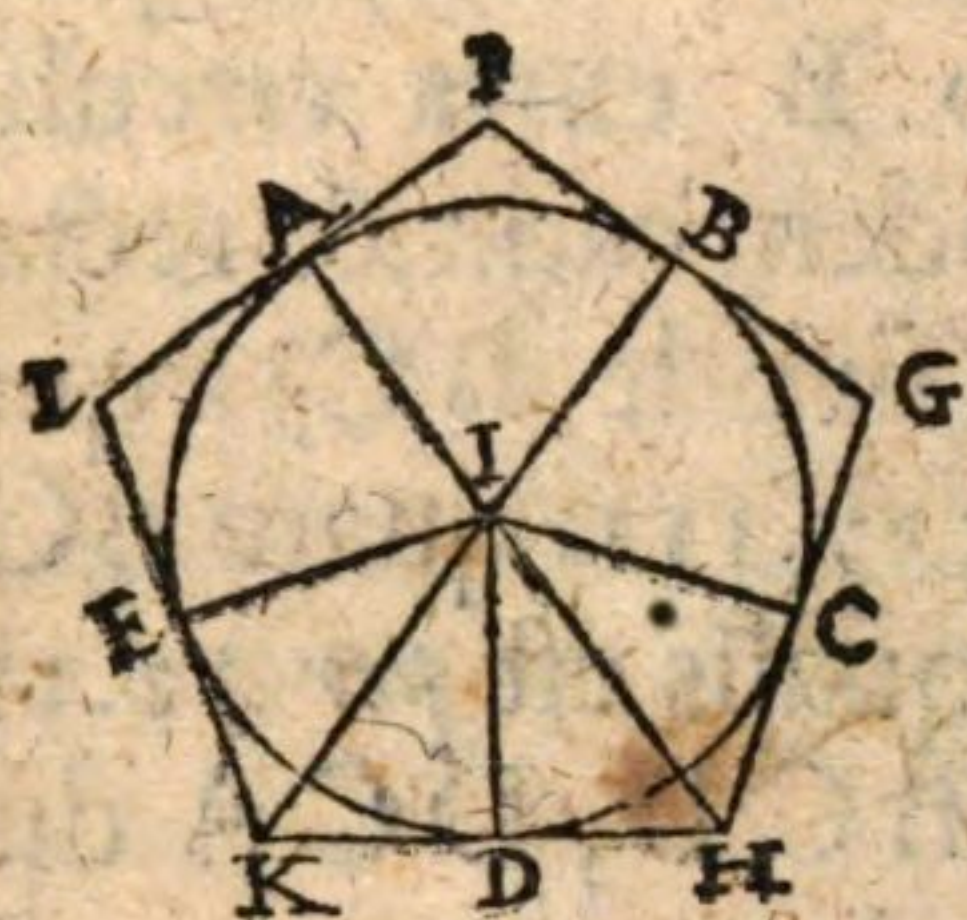
Diametri BC, DE decussatim ad angulos rectos ducantur. Quoniam duo triangula BDC, BEC Isoscelia æquiangula, & æqualia sunt *per* 4. I. quivis angulorum qui ad basin sunt, semirectus est *per* 32. I. & rectæ AB, AC, AD, AE æquales. si centro A intervallo AB circulus ducatur, transibit per singulas dictarum linearum extremitates, & circumscriptus erit quadrato.

PROP.

CD, CB, anguli omnes CBD, DBE, ECF, FCB, BEC sunt æquales *per* 21. & 26. III. Quinque ergo anguli segmentis insistant, quæ totum circuli ambitum comprehendunt. Pentagonum igitur BCDEF, æquilaterum & æqui-angulum est.

PROP. XII.

*Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum
& æquiangulum describere.*

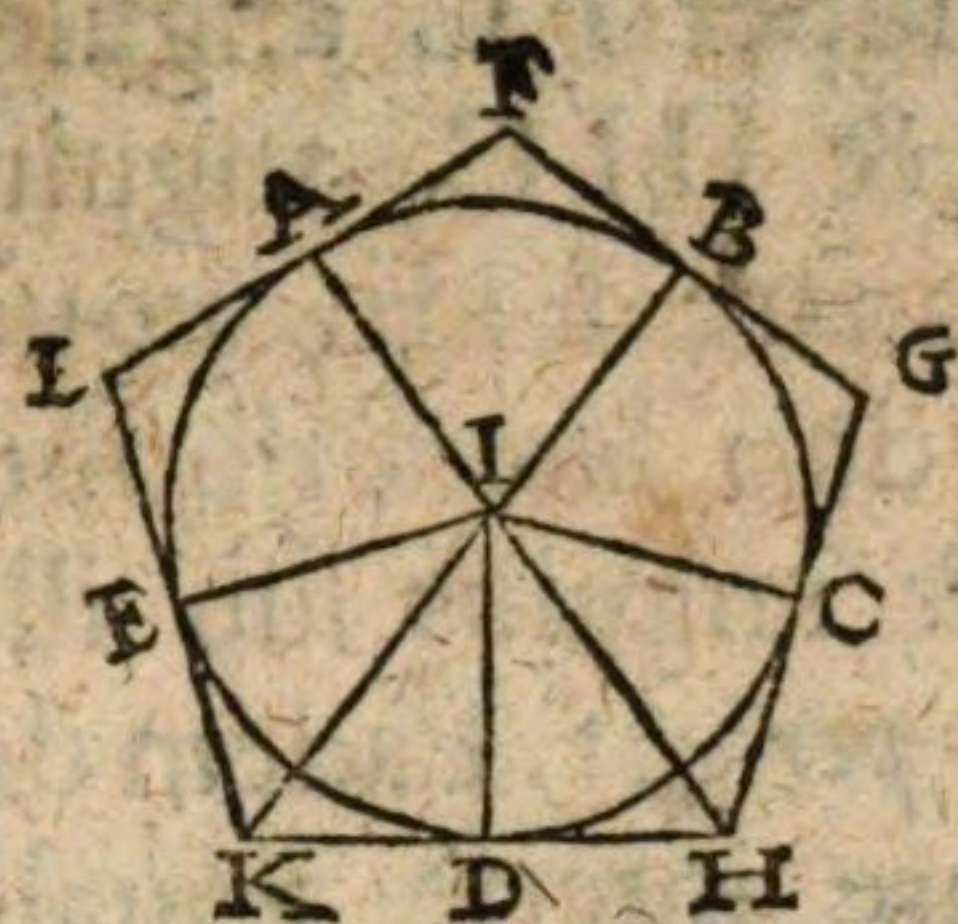


Circuli dati centro I, in singula periphæriæ puncta quæ pentagoni angulos circulo inscripti exhibent *per* 11. ducantur semidiametri IA, IB, IC, ID, IE, ad quarum extremitates, ad angulos rectos, lineæ LF, FG, GH, HK, KL, ducantur, tangentes circulum & ducantur IK, IH. Quia latus EI lateri DI æquale est & IEK, angulo IDK, qui *per constructionem* rectus est: Quadratum de IK, æquatur quadratis de IE, EK, quemadmodum quoque quadratis de ID, KD. *per* 47.1. Sed angulus EID angulo DIC æqualis est [comprehendunt enim arcus æquales *per constructionem*] Quadrilaterum itaque EIDK, æquiangulum & æquale est quadrilatero DICH, dimidia dimidijs, & lineæ lineis. Quare KD æqualis DH, & DH, æqualis HC & sic de reliquis. Est itaque pentagonum circulo circumscriptum,

PROP. XIII.

*In dato pentagono æquilatero & æquiangolo
circulum inscribere.*

Pentagonum datum sit FGHKL, anguli æquibiscentur, lineis transeuntibus per centrum I, à quo cadant in singula penta-



pentagoni latera perpendicularares qui æquales erunt. Circulus itaque centro I, intervallo IA descriptus, per extremitates perpendicularorum transibit, dati pentagoni latera tangens per 16. III.

PROP. XIV.

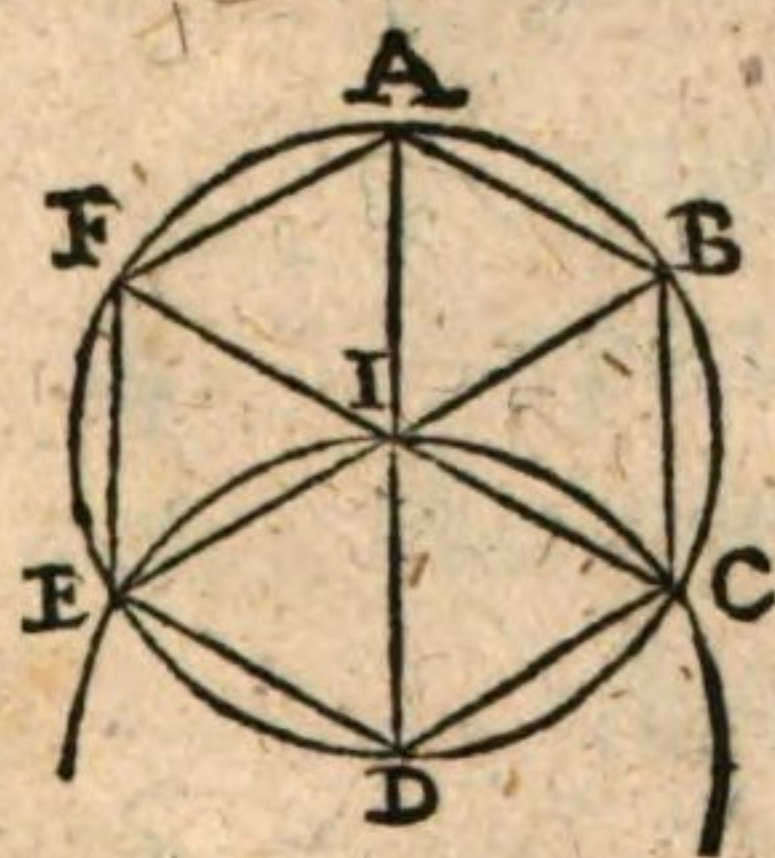
Circa datum pentagonum, æquilaterum & equiangulum circulum describere.



Datum pentagonum sit ABCDE, æquilaterum & æquiangulum, cuius centrum invenietur ut in 13 à quo in singulos angulos cadentes recte æquales erunt, ut demonstratur prop. 12. centro F & intervallo aliquius rectæ angulum æquibisecantis, circulus ducatur, qui transibit per linearum ductarum extremitates, & per consequens per extremitates angulorum pentagoni. Circulus ergo pentagono circumscriptus est.

PROP. XV.

In dato circulo, hexagonum æquilaterum & equiangulum inscribere.

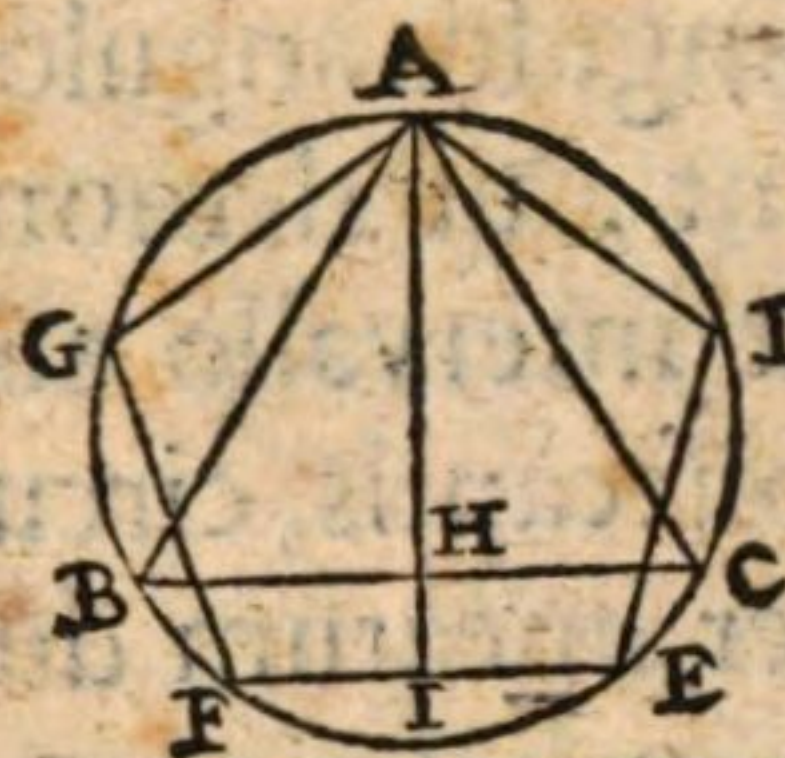


Circuli dati centrum I, sit, diameter AID: ducatur puncto D intervallo DI circulus [qui alteri æqualis est, cum idem capiat intervallum] ducantur EI, CI in circumferentiam B & F, & lineæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, per. 1. post: I. Duo triangula EID, DIC, sunt æqualia, æquiangula & æquilatera: & omnia sex triangula isoscelia sunt, latera habentia æqualia per 15. def. 1. & tres cuiusvis trianguli anguli, duobus

bus rectis æquales sunt. Sed EI cadens super FC angulos EIC, FIE facit duobus rectis æquales, & DIC, angulus æqualis duobus angulis trianguli EID; quare FIE, æqualis eidem DIC: & cum trianguli FIE duo latera duobus lateribus æqualia sint trianguli EID, & angulus sub illis comprehensus angulo, bases æquales erunt *per* 4.1. Eadem demonstratio est de reliquis lateribus, quare inter se æqualia sunt & per consequens dato circulo hexagonum inscripsimus.

PROP. XVI.

In dato circulo, quintidecagonum æquilaterum & equiangulum inscribere.



Circulo dato inscribatur pentagonum ADEFG *per* 11. & triangulum ABC æquilaterum *per* 2. quorum duo anguli ad idem punctum A convenient. Quia AB tertiam circumferentiæ partem subtendit [hoc est quinque decimasquintas] & duo pentagoni latera AG, GF sex decimasquintas subtendunt, quare arcus BF, inter angulum trianguli B & pentagoni F una decimaquinta erit totius circumferentiæ. Ducatur itaque BF & applicetur *per* 1. quatuordecim singulæ reliquæ in circulo applicatæ, huic BF, æquales erunt. Cum itaque æquales rectæ æquales circumferentias subtendant *per* 28. 111. evidens est, quintidecagonum circulo inscriptum esse.

FINIS QVARTI.

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

QVINTVS.

H Actenus Euclides de quantitate continua absolute considerata egit; nunc vero duobus sequentibus, de eadem non absolute disputat, sed prout una ad aliam referatur, id est quatenus comparata cum alia, proportionem aliquam habet. Hoc quidem quinto libro *Proportiones* in genere, non descendendo ad ullam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod, preclaro instituto persequitur. Communis enim hic liber est plurimis artibus & scientijs. Magna eius in *Musica*, *Astronomia*; *Isoropica*, *Perspectiva*; & *Arithmetica* vis est. Tantum *revolutiones mundi*, *mutationes imperiorum*, *miracula naturæ*, cum hac *proportionum* doctrina commercium habent, ut Philosophus, hac arte instructus, plurima sollerti ingenio quasi Numine tactus, ex abyſſo naturæ arcana eruere possit, nec errori inuoluetur, nisi cum auctor ille & conditor rerum Deus, potenti vi sua, Naturæ ordinem immutat.

DEFINITIONES.

1. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.*
2. *Multiplex est maior minoris, cum minor metitur maiorem.*
3. *Ratio, est duarum magnitudinum eiusdem generis, mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.*
4. *Proportio, est rationum similitudo.*
5. *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare.*
6. *In eadem ratione magnitudines dicuntur esse, Prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ*

tie æque multiplicia, à secunda & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque, vel una deficiunt, vel una æqualia sunt, vel una excedunt; si ea sumantur quæ inter se respondent.

7. Eandem habentes rationem magnitudines, proportionales vocentur.

8. Cum æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis excesserit multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ; tunc prima ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

9. Proportio in tribus terminis paucissimis consistit.

10. Cum tres magnitudines proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: & semper deinceps, uno ampli⁹, quā diu proportio extiterit.

11. Homologæ, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes antecedentibus, consequentes consequentibus.

[Sint quatuor magnitudines A. B. C. D: A ad B ut C ad D. hinc A C vocantur antecedentes, B & D consequentes.]

12. Alterna ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem; & consequentis ad consequentem.

13. Inversa ratio, est sumptio consequentis, seu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

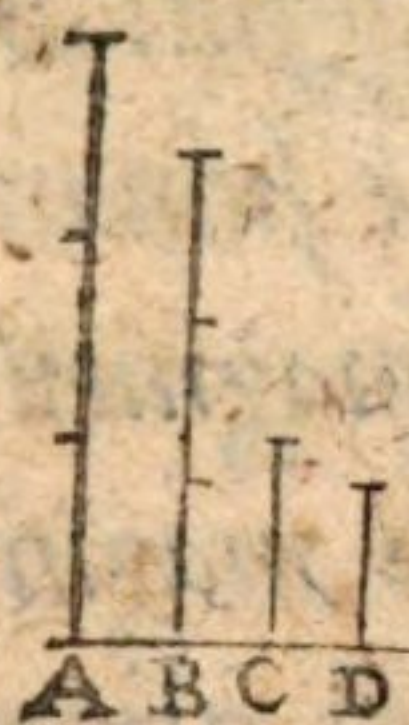
14. Com-

14. Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente, ceu unius ad ipsam consequentem.
15. Divisio rationis est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.
16. Conversio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.
17. Ex equalitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur & in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad ultimam sese habuerit. vel aliter sumptio extremorum, per subductionem mediorum.
18. Ordinata proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem; fuerit etiam ut consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.
19. Perturbata proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam, ad antecedentem.

Operæpretium putabam, duodecim præcedentes propositiones solummodo interpretari, demonstratione omilla, ne verborum Labyrinthus cuiquam negotium faceretur.

PROP. I.

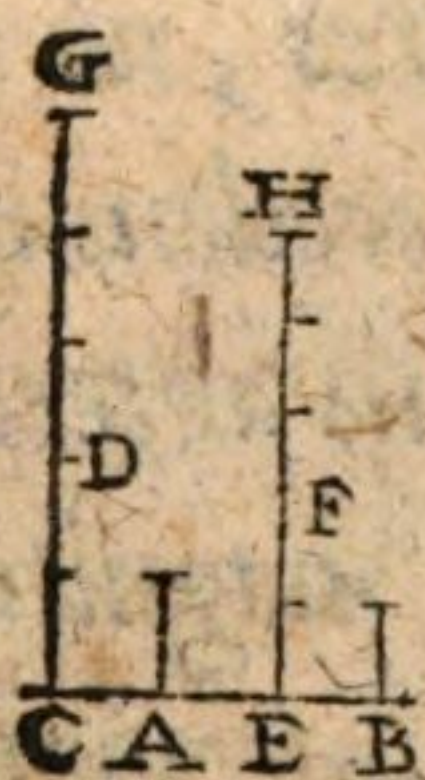
Si sint quotcunque magnitudines, quotcunque magnitudinum æqualium numero, singule singularum, æquè multiplices; quam multiplex est unius una magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.



Sint propositæ magnitudines A, B, C, D, si prima tertiam ter contineat & secunda quartam ter quoque recipiat; duæ priores A & B iunctæ tertiam & quartam iunctas, toties continebunt, & erunt ut tria ad unum.

PROP. II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, atque tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta secundæ æquè multiplex, atque tertia cum sexta quartæ.

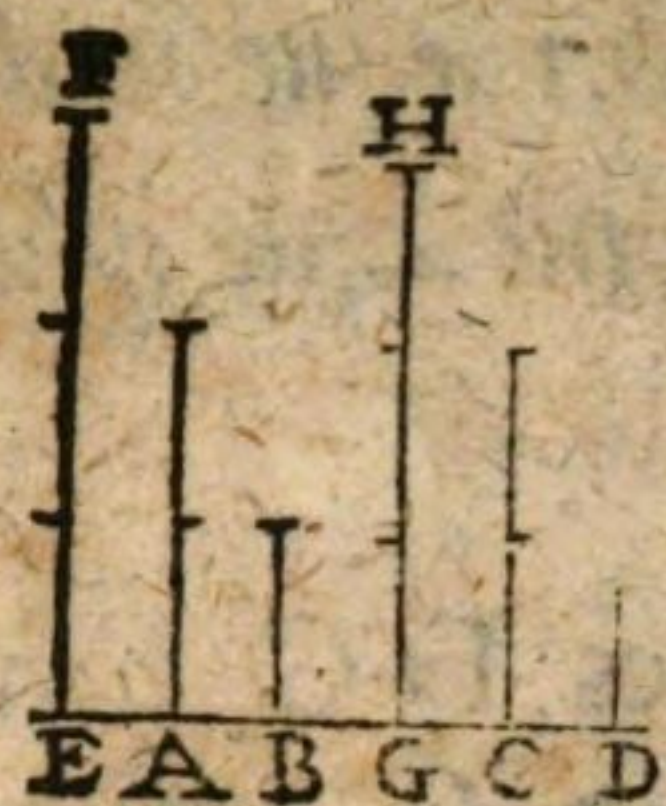


Prima CD, toties secundam A contineat quoties tertia EF, quartam B; & quinta DG, toties secundam A quoties sexta FH, quartam B continet: Compositæ CG, ex prima & quinta, toties secundam A continebit, quoties EH, ex tertia & sexta composita, quartam B continet.

PROP. III.

Si sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æquè multiplices primæ & tertiæ: erit & ex æquo, sumptarum utraque utriusque æquè multiplex; altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

Si prima A secundam B toties continet, quoties C tertia, D quar-



D quartam ; & EF toties primam, quoties GH tertiam : Etiam EF, secundam B, toties comprehendet, quoties GH quartam D.

PROP. IV.

Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam : etiam æquè multiples primæ & tertiæ, ad æquè multiples secundæ & quartæ, iuxta quamvis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si, prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.



Si prima A, ad secundam B, eandem rationem habuerit, quam tertia C, ad quartam D; toties vero E, contineat A; quoties F, continet C : & G, toties B, quoties H, comprehendit D. Erit E, ad G, ut F ad H.

PROP. V.

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatae : etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, ut tota totius.



Si tota AB, totam CD toties contineat, quoties ablata AE, ablatam CF; etiam reliqua EB, reliquam FD toties continebit, quoties tota totam.

PROP. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiples;

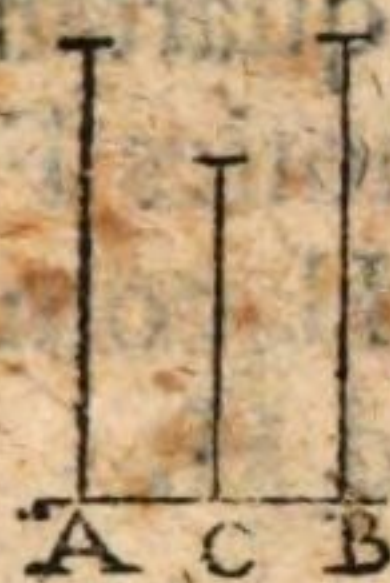
plices; & detractæ quædam sint earundem æque multiples: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiples.



Si AB, toties G contineat, quoties DC continet H; ablata vero BE, continet G toties, quoties DF ablata, H. reliquæ magnitudines EA, FC, æquales erunt G & H magnitudinibus. Et si ablata EA, toties G continet, quoties CF ablata, H. reliqua EB. toties G comprehendet, quoties reliqua FD, contineat H.

PROP. VII.

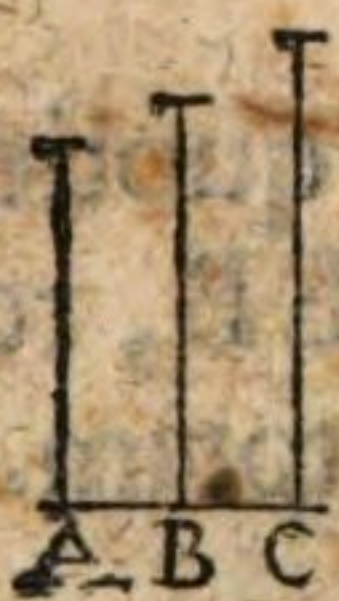
Æquales magnitudines ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.



Si magnitudo A magnitudini B æqualis sit, A ad C eandem rationem habebit, quam B ad C; & C, quoque eandem ad A, quam ad B.

PROP. VIII.

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



Duarum magnitudinem C maior, B minor, & tertia quevis A; habebit C ad A maiorem rationem quam B ad A. Et è converso maior erit ratio A ad B quam A ad C: hoc est longe maior erit C, respectu A quam B, respectu A.

PROP. IX.

Quæ ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: &

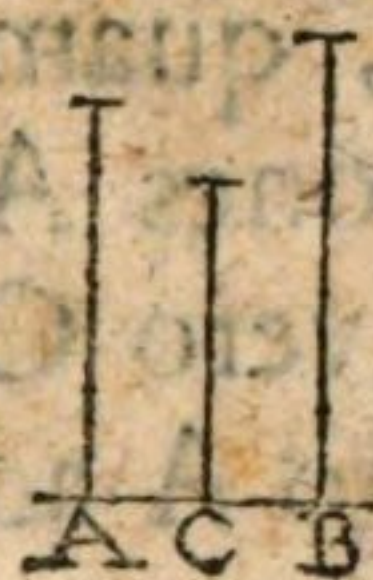
se: & ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.



Si A ad C, eandem rationem habuerit, quam B ad C; erunt A, & B, æquales inter se. Et si C, eandem servat rationem ad A, quam ad B, erunt quoque A & B, inter se æquales.

PROP. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.



Si B respectu C maior fuerit quam A, eiusdem C respectu, maior multo B fuerit quam A: & si C respectu A, maior fuerit, quam respectu B, erit A, minor multo quam B.

PROP. XI.

Quæ eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.



Si ratio H ad B, fuerit ut C ad Z; & ratio G ad O ut C ad Z; ratio H ad B, & G ad O, eadem erit.

PROP. XII.

Si sint magnitudines quotcunque proportionales; quemadmodum se habuerit una antecedentium ad unam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Si ratio



Si ratio A ad D, fuerit ut B ad E, & C ad F, tres antecedentes magnitudines A B C, iunctæ, erunt ad tres consequentes D E F, iunctas, ut A ad D.

PROP. XIII.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.



Prima A, sit ad secundam B, ut tertia C, ad quartam D. Ratio C ad D maior sit, quam quintæ E, ad sextam F. Quia ergo rationes A ad B, & C ad D, similes sunt; Ratio vero C & D maior est quam E ad F: Ratio ergo A ad B maior quoque erit quam E ad F per 11.

PROP. XIV.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior, quam quarta. Quod si prima fuerit aqualis tertiæ, erit & secunda aqualis quartæ: si vero minor, & minor erit.



Prima A magnitudo, ad secundam B, sit ut tertia C, ad quartam D; si A quam C maior fuerit, etiam B maior erit quam D. Est vero A quam C maior: Quare ad B maiorem rationem habebit quam ad C. per 8. Sed cum A ad B, sit, ut C ad D: habebit C ad D maiorem rationem, quam ad B: Quare & B quam D maior fuerit per 10. Et si prima

prima minor fuerit, quarta quoque minor erit; & si æqualis, ob eandem rationem æqualis.

PROP. XV.

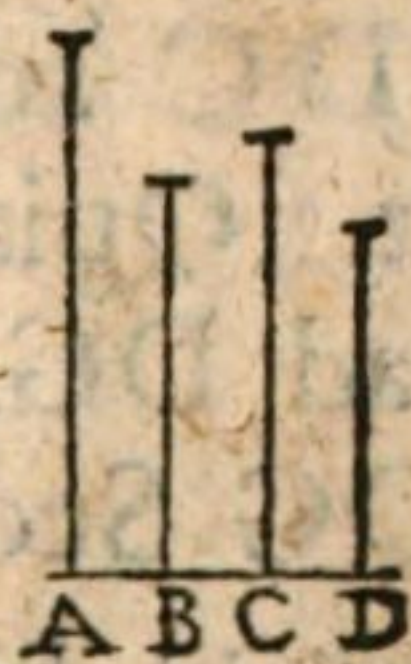
Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.



Sit AE pars de AB , & CF pars de CD ; contineat AB toties AE , quoties CD continet CF . Quoniam ergo ut se una antecedentium AE , ad unam consequentium CF habuerit, ita omnes antecedentes AB , ad omnes consequentes CD habebunt *per 12.* quare ut AB ad CD , ita AE ad CF .

PROP. XVI.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

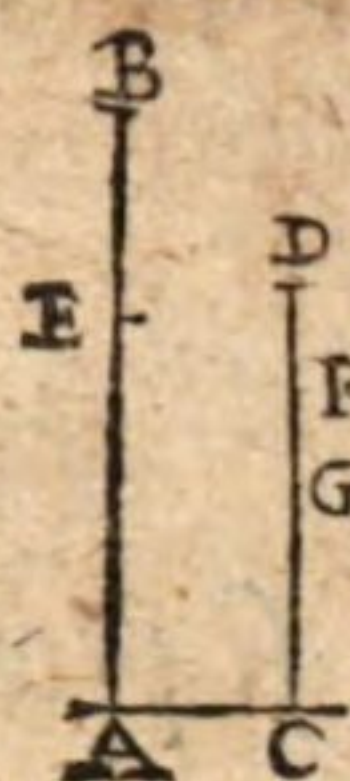


Sit A ad B ut C ad D . Quia *per 12.* omnes antecedentes ad omnes consequentes sunt, ut una antecedentium ad unam consequentium; permutetur ordo certa ratione, ita ut A prima sit ad B secundam, quemadmodum C tertia ad D quartam. Antecedentes AC , simul, ad consequentes BC , simul, erunt ut A ad B , vel C ad D . Erit ergo A ad C ut B ad D ; & *per consequens* proportionales erunt, ut A ad B ita C ad D ; & ut A ad C ita B ad D .

PROP. XVII.

Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque divisæ proportionales erunt.

Compositæ magnitudines sint AB , ex AE , BE ; & CD ,
K
ex CF ,



ex CF, DF : & sit ut tota AB ad sui partem EB , ita tota CD , ad sui partem FD ; dico quod & AE , ad EB , sit ut CF , ad FD . Nam si magnitudo CD , in puncto F , in eadem proportionem ut AB , in E secta non fuerit, sumatur aliud [si fieri potest] nempe G . Erunt ergo duæ antecedentes coniunctæ [hoc est AB] ad duas consequentes iunctas, [id est CD] ut BE ad DG . Sed ponebatur tota AB ad EB , ut tota CD ad FD . Ergo *per* 16. ut AB ad CD , ita BE ad DF erit: Quare DF , æqualis erit DG , pars toti, quod est absurdum.

PROP. XVIII.

Si divisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.



Sint magnitudines divisæ & proportionales ut AB & CD ; divisæ punctis E, F ; & sit ut BE , ad EA , ita DF ad FC ; dico quod eadem compositæ sint ut BA ad BE , ita DC ad DF : Quod si non fuerit, sit [si fieri potest] BA ad BE , ut DC ad aliam aliquam DF maiorem, quæ DG sit. Quia compositæ magnitudines BA ad BE , sunt ut DC ad DG , eadem divisæ BA ad BE erunt *per* 17. ut DC ad DG . Sed ut BA ad BE , ita ponebatur DC ad DF , Ergo *per* 14. ut DC ad DF , ita DC ad DG ; & pars DF , toti DG æqualis erit, quod est absurdum.

PROP. XIX.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum se habebit.

Duæ magnitudines sint AB, CD , & ut AB , ad CD , ita ablata AE ad ablatam CF sit: dico reliquam, EB ad FD reliquam



reliquam esse ut AB ad CD . Quia enim quatuor magnitudines AB , CD , AE , CF , proportionales sunt; erit *per* 16. CD ad CF , ut AB ad AE . *Per* 17. eadem magnitudines compositae & proportionales erunt, divisis proportionalibus existentibus; Vt igitur tota AB ad totam CD , ita ablatata ad ablatam, & reliqua ad reliquam.

PROP. XX.

Si sint tres magnitudines, aliae ipsis aequales numero, quae binae & in eadem ratione sumantur; Ex aequo autem prima quam tertia maior fuerit; erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiae fuerit aequalis, erit & quarta aequalis sextae: sin illa minor, haec quoque minor erit.



Sint tres magnitudines A , B , C , totidem D , E , F , quae binae in eadem ratione sumantur; hoc est, sit A , ad B , ut D ad E , & B ad C , ut E ad F , & sit A prima maior quam C tertia. Quia *per* 8. A ad B maiorem rationem habet quam C ad eandem B : & conuertendo ut C ad B , ita F ad E , & ut B ad A , ita E ad D . Erit ergo D quam F , maior *per* 10. Et si A aequalis C fuerit, etiam D , aequalis F erit. Quod si A minor C fuerit, etiam D minor F erit.

PROP. XXI.

Si sint tres magnitudines, & aliae ipsis aequales numero, quae binae, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio: ex aequo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta maior. Quod

si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoque minor erit.



Sint tres magnitudines $A B C$ totidemque $D E F$, quæ binæ in eadem ratione sumantur, sitque earum perturbata proportio, [hoc est sit ut A ad B ita E ad F , & ut B ad C ita D ad E ;] sitque A prima, maior quam C tertia. Erit *per 8.* maior proportio A ad B quam C ad B , & *per 13.* maior est proportio E ad F quam C ad B . Quoniam vero ut B ad C ita est D ad E : Erit convertendo ut C ad B ita E ad D . Quare maior erit proportio E ad F quam E ad D , ideoque maior erit D quam F *per 10.* Sic si A esset C æqualis, esset quoque D ipsi F æqualis: & si A minor C esset, D quoque F minor existeret.

PROP. XXII.

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur; & ex æqualitate in eadem ratione erunt.



Sint tres magnitudines $A B C$, totidemque $D E F$, quæ binæ in eadem ratione sumantur, A ad B ut D ad E , & B ad C ut E ad F . Si A ad C non fuerit, ut D ad F , adiungatur prioribus G ; & sit ut A ad B ita C ad G . Erunt ergo quatuor ille proportionales, & in ratione permixta *per 16.* erit A ad C ut B ad G . Posterioribus adiungatur H , & sit ut D ad E ita F ad H . *Per 16,* ergo D ad F ut E ad H erit. Sunt autem quatuor antecedentes in eodem ordine & proportionem cum consequentibus ex hypothesis. Erit ergo A ad C ut D ad F .

PROP.

PROP. XXIII.

Si sint tres magnitudines, aliaq; ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

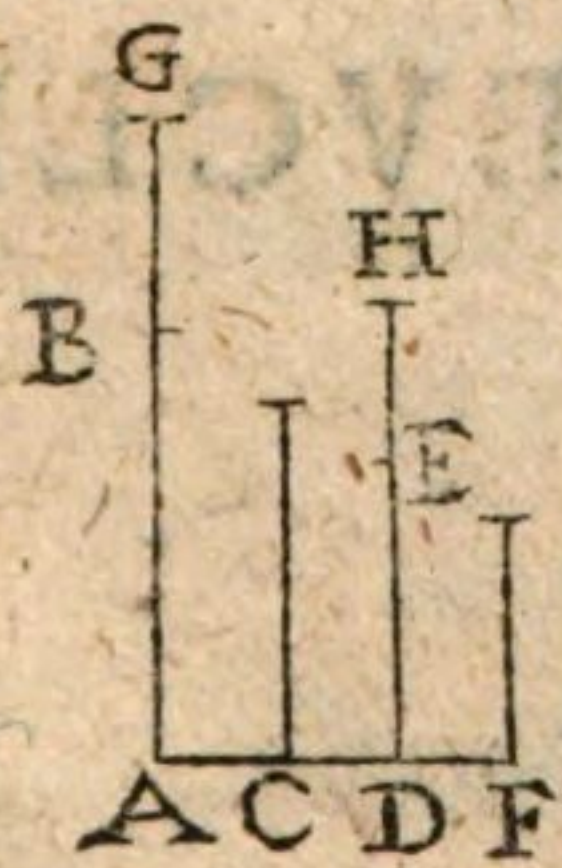


G ut A ad C
A ad C.

Sint tres magnitudines A B C, totidemq; D E F, sitque perturbata earum proportio. Si iam D ad F, non ut A ad C fuerit, ponatur G, & sit ut B ad C, ita F ad G. Erit tunc D ad E, ut F ad G, & quatuor illæ proportionales erunt, & per consequens ut D ad F ita E ad G per 16. Est autem E ad G ut A ad C per constructionem. Igitur D ad F est ut

PROP. XXIV.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.



Sit A B prima ad C secundam ut D E tertia ad F quartam: item B G quinta ad C, ut E H sexta ad F. Dico primam & quintam ita ad secundam esse, ut ex tertia & sexta composita ad quartam. Cum enim sit ut B G ad C ita E H ad F. Erit convertendo ut C ad B G ita F ad E H. Quoniam igitur est A B ad C ut D E ad F, & C ad B G ut F ad E H. Erit ex æquo A B
K 3 ad B G

ad BG ut DE ad EH *per* 22. Componendo igitur erit ut tota AG ad GB, ita tota DH ad EH. Itaque cum rursus sit AG ad BG ut DH ad EH, & BG ad C ut EH ad F. Erit ex æquali AG ad C ut DH ad F, quod est propositum.

PROP. XXV.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



Quatuor magnitudines proportionales sint, ut AB ad CD ita E ad F. Maxima sit AB, à qua auferatur AG æqualis E, & à CD tollatur CH æqualis F minimæ. Erit igitur ut AB ad AG ita CD ad CH, & *per* 19. reliqua GB ad HD reliquam, ut AB ad CD. Maior itaque GB, quam HD fuerit. Ex GB, abscindatur GI, æqualis HD, quare AI continet E & HD magnitudines, igitur AI & F magnitudinibus, E & CD æquales sunt. Si addatur IB magnitudo, AB & F maiores fuerint quam CD & E.

FINIS QVINTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTORVM

SEXTVS.

Sexto hoc libro ostendit in specie quamnam proportionem habeant inter se lineæ, anguli, circumferentiæ circulorum, triangula, & aliæ figuræ planæ. Maximus eius usus est in compositione instrumentorum, quibus altitudines, latitudines, & profunditates metimur; qualia sunt, *Sphæra*, *Schala altimetra*, *Astrolabium*, *baculus Iacobi*, &c. Horum omnium ceterorumque componendi & utendi modum *Geometrica* ratio ex hoc petita confirmare potest. Archimedeo quoque ingenio instrumenta huius libri subsidio excogitare licet, quibus pondera eleuantur, transportantur, aut aliquo modo moventur, aliaque plurima quæ in *Mechanicis* & negotijs humanis magnum usum habent. *Librarum*, *vectium*, & *Cohlearum* pulcherrimæ rationes ex hoc sumuntur, amœnitateque sua contemplantis animum mire reficiunt. Incredibile est, apud imperitos, quam uberes fecundique fructus ex hoc libro petantur, quantaque voluptas hominum animis ex talium rerum meditatione accedat.

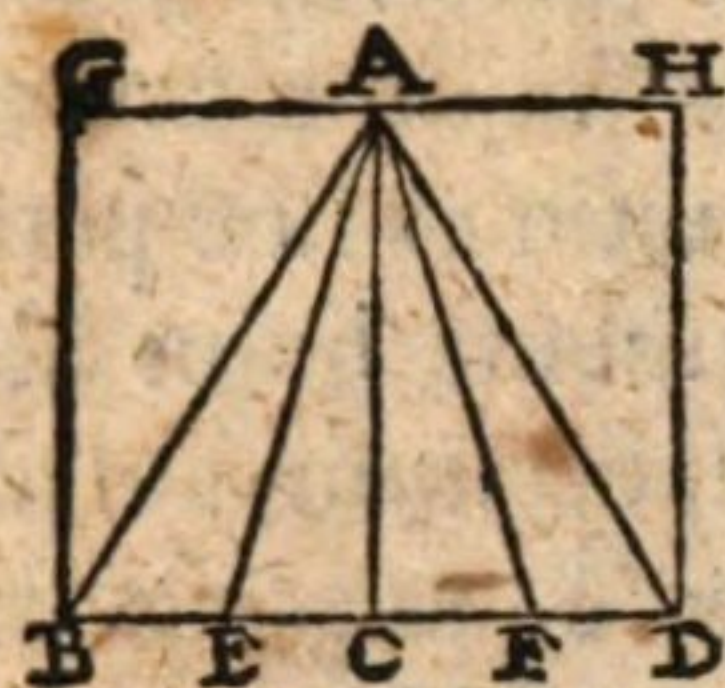
DEFINITIONES.

1. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales proportionalia.*
2. *Reciproæ figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.*
3. *Secundum extremam & mediam rationem recta secta esse dicitur, cum ut tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.*
4. *Altitudo cuiusque figuræ, est linea perpendicularis, à vertice ad basin deducta.*
5. *Ratio*

5. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter se multiplicatae, aliquam effecerint rationem.

PROP. I.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se ut bases.



Sint duo triangula ABC , ADC , eandem habentia altitudinem AC , quorum bases BC , CD . dico triangulum ABC , ad triangulum ADC , esse ut basis BC ad basin CD . Æquibisecentur bases in E , F , ducanturq; AE , AF . Vt igitur basis CE ad basin CB , ita CF ad CD per 18.v. Iam ut CE ad EB , & CF ad FD : ita triangulum CAE , ad EAB ; & CAF , ad FAD per 38.i. Et componendo, ut triangulum BAC , ad BAE ; ita CAD ad FAC per 18.v. Etest eadem ratio basium BC ad EC , sive DC ad FC . Quare per 12. & 16.v. ut primum triangulum sive inagnitudo BAC ad secundam CAD , ita EAC ad FAC , & eadem est basium BC ad CD ratio, ut demonstravimus. Eadem parallelogrammorum CG , CH ratio est, cum duplum sint triangulorum:

Corollarium.

Triangula & parallelogramma equalium basium, ita se habent inter se ut altitudines.

PROP. II.

Si ad unum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera.

Et si

Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.



In triangulo ABC recta DE , Parallela BC ducatur & iungantur BE , CD . Triangula DEB , EDC , cum eadem basi DE , insistant, & inter easdem parallelas æquales erunt *per 37.1.* Vt igitur ADE , ad DBE triangulum, ita AD , ad DB basin [sunt enim in eadem altitudine] & ut AED , ad ECD ; ita AE ad EC *per 1.* ergo *per 7.v.* AD ad DB erit, ut AE , ad EC . Deinde supponatur, latera AB , AC , proportionaliter secta esse in D , E . Quia ergo ADE triangulum, ad DEB , eandem rationem habet quam ad EDC , [nam est ut AD ad DB , five ut AE ad EC] Triangula DEB , EDC , *per 9.v.* æqualia sunt. Et quia super eadem basi sunt, erunt inter easdem parallelas, *per 39.1.* DE , ergo parallela est BC .

PROP. III.

Si trianguli angulus æquibisectus sit, secans autem angulum recta secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta, eandem habuerint rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta, quæ à vertice ad sectionem producitur, æquibisecat ipsius trianguli angulum.

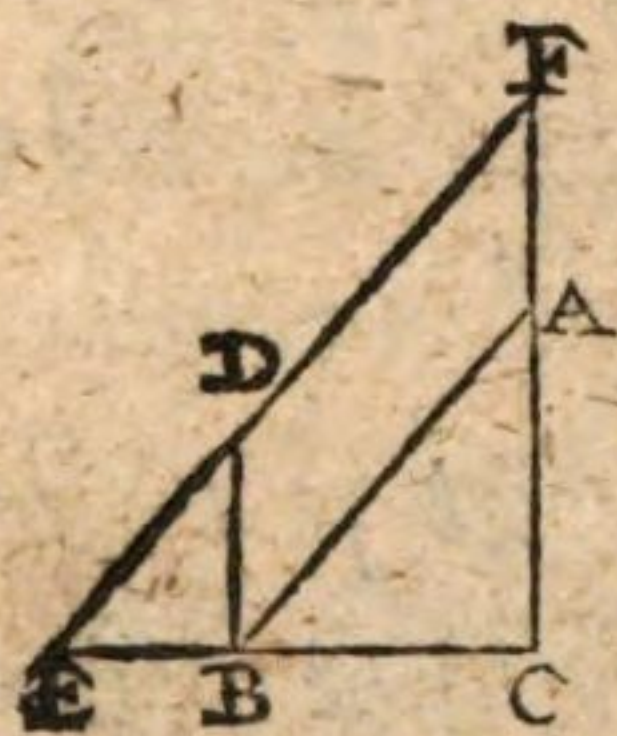


Recta AD , angulum BAC , trianguli ABC æquibisecet: dico esse ut BA ad AC , ita BD ad DC . Agatur puncto B , recta BE , parallela DA , coiens cum CA , protracta in E , eritque EBA angulus, alterno BAD æqualis *per 29.1.* & E , externo DAC . Cum ergo duo anguli

anguli BAD , CAD , æquales ponantur, erunt & anguli EBA & E inter se æquales, & rectæ BA , EA , æquales *per 6.1.* Ergo *per 2.* cum in triangulo EBC rectæ DA , BE parallelæ sint, ut EA [five æqualis BA] ad AC , ita BD , ad DC erit. Sit deinde ut BA , ad AC , ita BD ad DC , dico AD , angulum BAC æquibifecare. Disponentur BE , EC , ut dictum est. Quia ut BA ad AC , sic BD ad DC , *per hypothesin*; ut autem BD ad DC ita est EA ad AC . *per 2.* Erit ut BA ad AC , ita EA ad eandem AC *per 11.v.* Æquales igitur BA , EA , *per 9.v.* & anguli ABE & E *per 5.1.* Cum ergo ABE alterno BAD , æqualis sit, & E , externo DAC , duo anguli BAD , DAC , inter se sunt æquales.

P R O P. IV.

Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos; & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

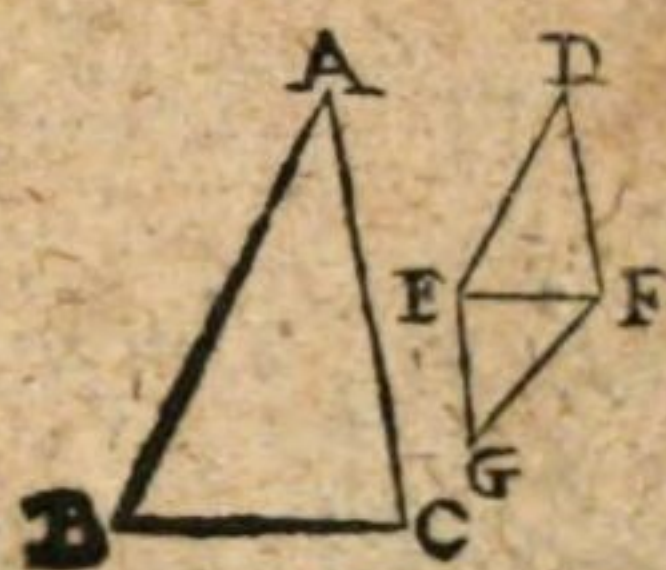


Sint trianguia æquiangula ABC , DEB , quorum anguli ACB , DBE : CAB , D : ABC , E : æquales sint; dico esse ut AC ad DB , sic CB ad BE , & ut AB ad DE quæ æqualibus angulis subtenduntur: constituantur CB , BE , secundum lineam rectam, ita ut externus angulus DBE interno C æqualis sit: Quare DB , parallela erit CA *per 28.1.* & ED parallela BA , cum DEB angulus ABC æqualis sit. Productis ED , CA convenient in F , eritq; DA parallelogrammum *per 34.1.* Quoniam igitur in triangulo FCE , rectæ BD , CF parallelæ sunt, erit *per 2.* ut ED ad DF , [five BA æqualem] ita EB ad BC . Et cum BA parallela sit EF , erit CB ad BE , ut CA , ad AF [five BD , æqualem] & ut AB ad BE ita FD [five AB] ad DE .

P R O P.

PROP. V.

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



Duorum triangulorum latera proportionalia sint nempe ut AB ad BC , ita DE ad EF & ut AC ad CB ita DF ad FE & ut AB ad AC ita DE ad DF . Si data triangula ABC , DEF , non sunt æquiangula; super recta EF , ad punctum E ponatur angulus, B angulo æqualis, & ad punctum F , alius æqualis C ponatur: tertius ergo G , æqualis erit A per 32.1. & triangula ABC , EEG , æquiangula sunt, & per 4. latera circa æquales angulos A & G erunt proportionalea: AB ad AC ut GE ad GF , & AB ad BC ut GE ad EF , & AC ad CB , ut GF ad FE . Sed trianguli DEF latera in eadem ratione ponebantur. DE ergo EG æqualis erit per 9.v. & DF , FG . Ergo triangula DEF & EEG , æqualia sunt per 8.1. Et per consequens DEF , æquiangulum per 1. axio. ABC triangulo.

PROP. VI.

Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



Duorum triangulorum ABC , DEF , anguli A & D æquales sint, & latus AB ad AC ut DE ad DF : dico angulum B angulo E æqualem esse & C æqualem F : super EF ad E ponatur angulus, B æqualis, & ad F , æqualis C .

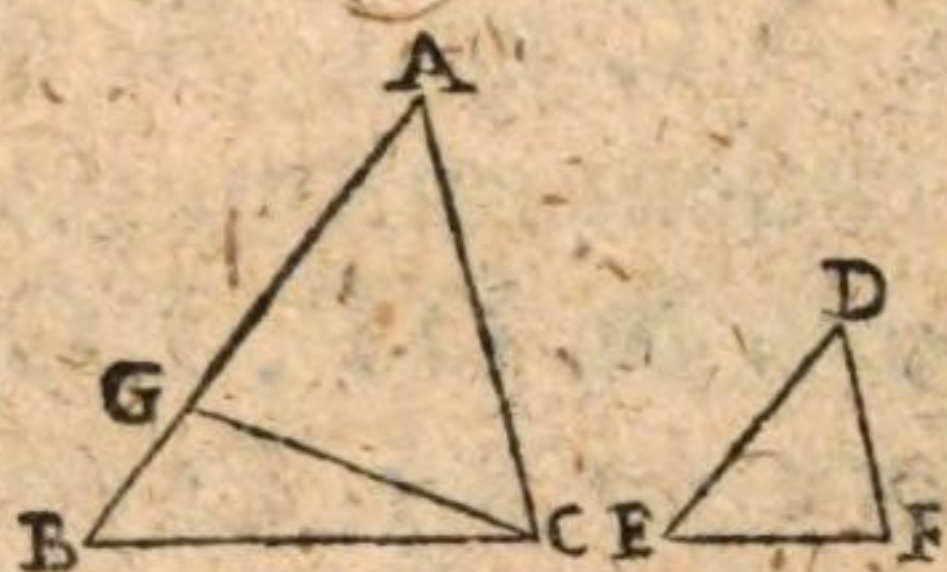
L 2

Erit

Erit ergo G æqualis A *per* 32.1. & triangulum EFG æquiangulum ABC triangulo, & latera proportionalia erunt *per* 4. ut AB ad BC , ita GE ad EF , & ut AC ad CB , ita GF ad FE . Sed trianguli DEF , duo latera in eadem ratione ponebantur, nempe ut DE ad DF , ita AB ad AC , [five GE ad GF] ergo *per* 7.v. DE , df æquales sunt GE gf , & basi EF , existente communi, triangula æquiangula sunt *per* 8.1.

PROP. VII.

Si duo triangula unum angulum, uni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habent, reliquorum vero simul utrumque aut minorem, aut non minorem recto: equiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

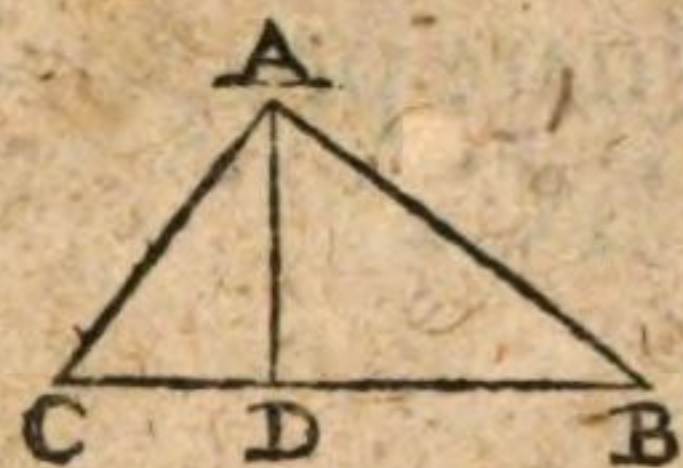


Triangulorum ABC , DEF , anguli A & D æquales sint, & latera ut AC ad CB ita DF ad FE , quilibet vero reliquorum angulorum B & E , sit vel minor recto vel non minor recto. Sit primo recto minor. Si anguli ACB & F non sunt æquales, sit ACB quam F maior, fiatque ipsi F , æqualis ACG . Erit *per* 32.1. AGC quoque E æqualis, & triangula AGC , DEF , æquiangula; quare ut AC , ad CG , ita DF ad FE *per* 4. Sed ut DF ad FE , ita ponitur AC ad CB . Vt igitur AC ad CG , ita eadem AC ad CB *per* 11.v. & propterea æquales CG , CB , *per* 9.v. & anguli CBG , CGB , *per* 5.1. æquales. Cum igitur B . recto minor ponatur: erit & CBG recto minor, ideoque ei deinceps AGC , recto maior, cum AGC , CGB , sint duobus rectis æquales *per* 13.1. Est autem ostensus angulus AGC , angulo E æqualis, maior igitur recto, est quoque angulus E : sed positus est etiam recto minor; ergo idem maior & minor recto erit quod est absurdum. Sit deinde tam
B quam

B quam E recto non minor, eruntq; ut prius B & CGB, æquales, ideoque & CGB recto non minor erit, & propterea CBG, CGB in triangulo BCG non minores erunt duobus rectis: sed vel maiores vel æquales duobus rectis *contra* 17.1. Non ergo ACB & F inæquales sunt sed æquales, atque idcirco reliqui anguli B & E æquales *per* 32.1. quod est propositum.

PROP. VIII.

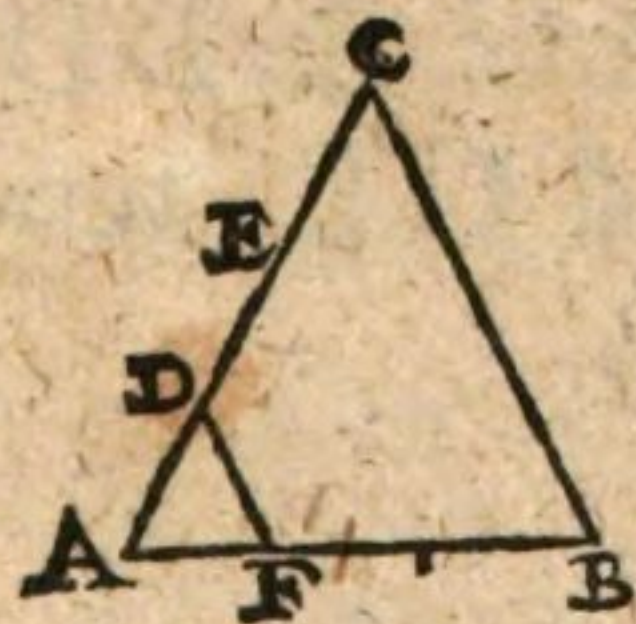
Si in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



Ex angulo recto A, perpendicularis AD, in basin CB, trianguli ABC cadat. Quia in triangulis ABC, ADC, anguli BAC & ADC, recti sunt, & C angulus communis, reliqui anguli ABC, CAD æquales erunt *per* 32.1. Quare ut BC ad CA, ita CA ad CD; & ut CA ad AB ita CD ad DA; & ut CB ad BA, ita CA ad AD, *per* 4. Eadem est demonstratio trianguli ABD.

PROP. IX.

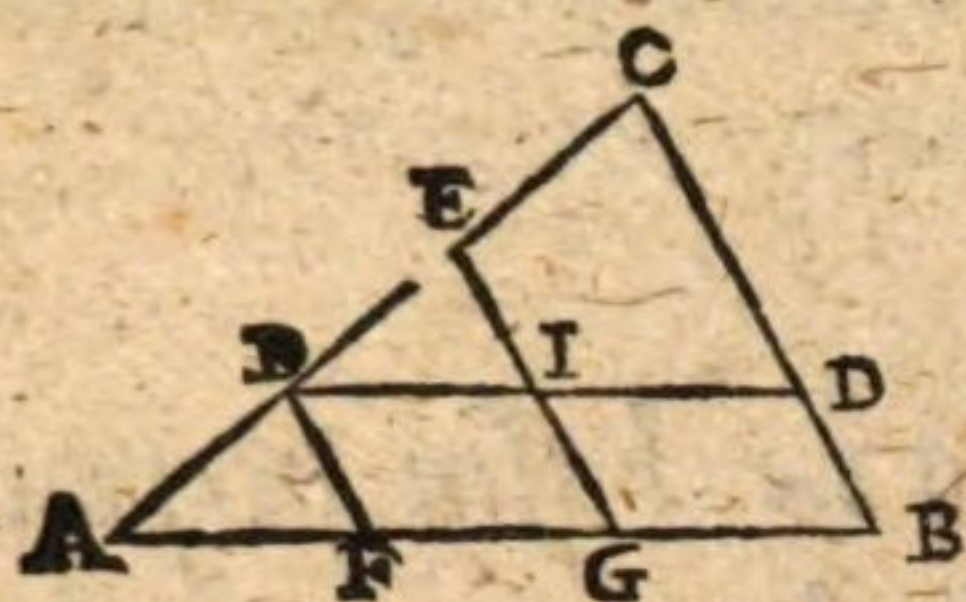
A data recta imperatam partem auferre.



A data recta AB, tertia pars auferatur. Ex A recta AC ducatur faciens angulum quemcunque, quæ in tot æquales partes secetur, cuiuslibet magnitudinis, quota detrahenda sit, ut AD, DE, EC; ducatur deinde CB, cui puncto D, parallela ducatur DF; Erit ut CD ad DA, ita BF ad FA *per* 2. Componendo igitur ut CA ad DA, ita BA ad FA *per* 18.v. Constat ergo AF tertiam partem esse rectæ AB.

PROP. X.

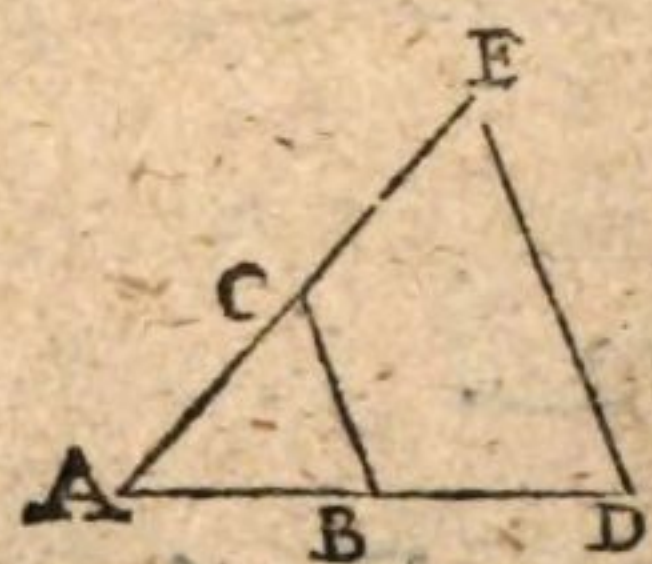
*Datam rectam infectam, similiter secare,
ut data recta secta fuerit.*



Infecta AB, sit similiter secanda ut AC, secta est in D & E, coniungantur ad A facientes quemcunque angulum CAB, ducatur CB cui punctis E, D parallelæ agantur EG, DF. *Per 2.* ut AD, ad DE, ita AF ad FG: proportionales ergo partes sunt AF, FG, partibus AD, DE. Si DH, parallela ducatur AB puncto D: erit ut DE ad EC ita DI ad IH [hoc est FG ad GB quòd FG, *gb* æquales DI, *ih* sint *per 34.1.*] Quare proportionales erunt partes FG, GB, partibus DE, EC.

PROP. XI.

Daabus datis rectis, tertiam proportionalem invenire.

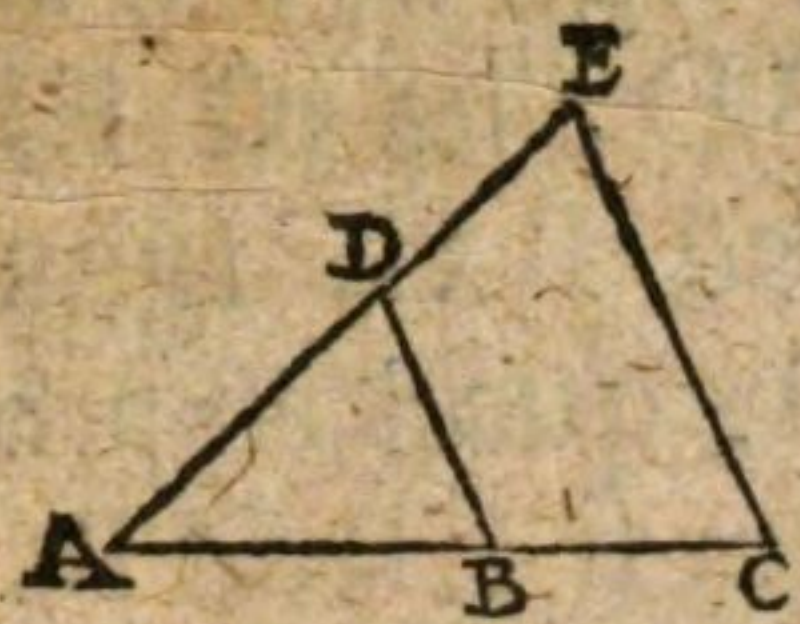


Data rectæ AB, AC disponantur ut A angulum quemcunque efficiant; extendatur AB in D, ita ut BD, sit AC æqualis; ducatur BC cui puncto D, parallela agatur DE cadens in punctum E protractæ AE. Erit ergo ut AB ad BD, ita AC ad CE *per 4.* Sed AC & BD æquales sunt; Igitur ut AB ad AC, ita AC ad CE, tertiam proportionalem quæ quærebatur.

PROP. XII.

Tribus datis rectis, quartam proportionalem invenire.

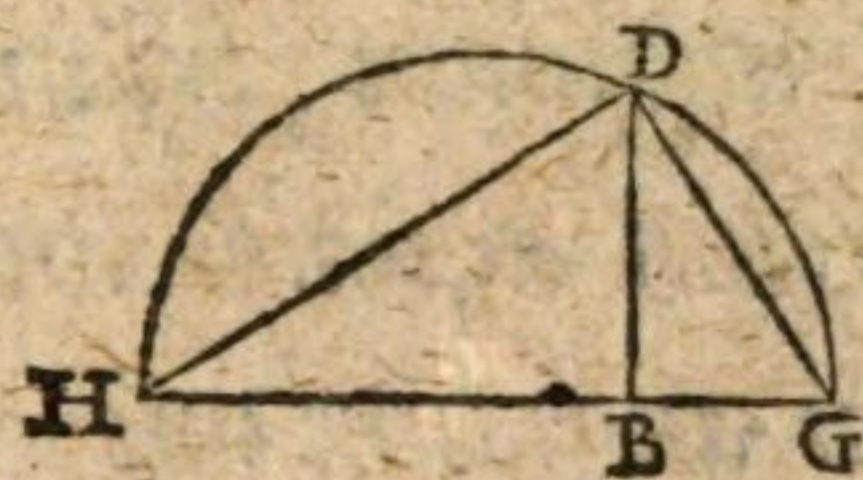
Dentur rectæ AB, BC, AD: primæ duæ secundum unam
rectam



rectam quæ sit AC , ponantur. Tertia cum prima A , angulum efficiat quemcunque. Ducatur BD , cui puncto C , parallela agatur CE cadens in punctum E protractæ AD . Erit ergo per secundam ut AB ad BC , ita AD ad DE quartam proportionalem quæsitam.

PROP. XIII.

Duabus datis rectis, mediam proportionalem invenire.



Dentur rectæ AB , BC , in directum positæ, super tota AC , semicirculus ADC , ponatur, puncto B perpendicularis BD , ad circumferentiam usque educatur, iunctis DA , DC . Triangulum ADC rectangulum erit *per 31. IXI.* cadit vero angulo recto D , perpendicularis DB , super basin AC ; facit ergo duo triangula æquiangula, *per 8.* ergo & proportionalia *per 4.* Quare ut AB ad BD ita BD ad BC , est ergo BD , media proportionalis inter AB , BC .

PROP. XIV.

Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum unum angulum uni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

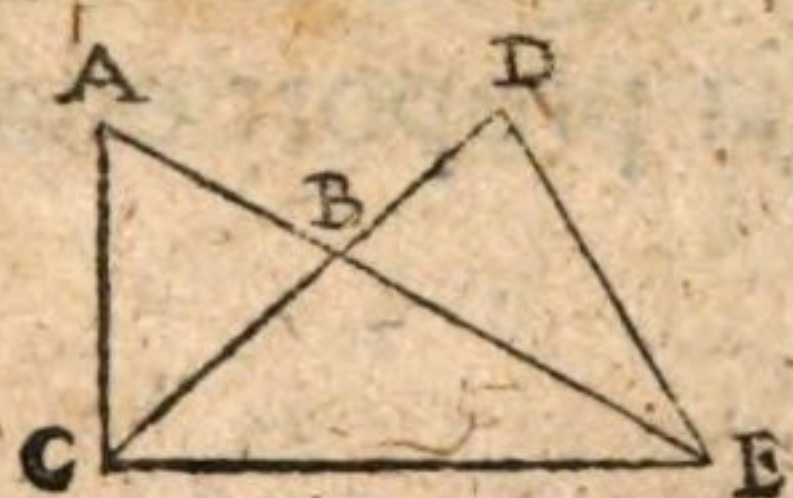


Duo parallelogramma æqualia FB , BD , angulos EBG , ABC habeant æquales: dico EB , ad DC , reciproca esse ut AB ad BG . Connectantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita ut AB , BG , unam rectam efficiant, extendantur

dantur FG , DC , donec coeant in H . Erit ergo ut FB ad BH ita BD ad BH *per 7.v.* Sed ut FB ad BD , ita est EB ad BC *per 1.* & ut DB ad BH , ita AB ad BG . Igitur *per 11.v.* ut EB ad BC , ita est AB ad BG , quod est propositum *Ex sensu 2. defin.* Similiter demonstratur si EB ad BC reciproca sint ut AB ad BG ; parallelogramma FB , BD , æqualia esse. Nam cum *ex hypotesi* EB ad BC sit ut AB ad BG , ita erit FB ad BH ut DB ad BH , *per 1.* Ergo *per 9.v.* parallelogramma FB , BD , æqualia erunt.

PROP. XV.

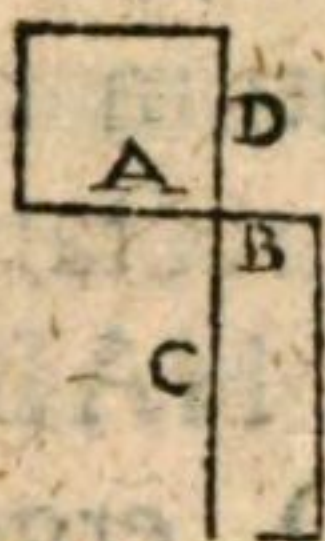
Æqualium & unum uni æqualeni habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



Æqualia triacula ABC , DBE angulos ad B , habeant æquales; dico reciproca esse ut AB ad BE ita DB ad BC . coniungantur triacula ad angulos æquales, ita ut AB , BE unā rectam efficiant. Ducatur CE . Erit ut ABC ad BCE , ita DBE ad BCE *per 7.v.* Sed ut triangulum ABC ad triangulum DBE , ita basis AB ad BE basin; & ut DBE ad BCE ita DB ad BC *per 1.* Ergo ut AB ad BE , ita DB ad BC . Similiter demonstratur si ut AB ad BE , ita reciproce sit DB ad BC , triacula ABC , DBE æqualia esse. Nam cum *ex hypotesi* sit ut AB ad BC ita DB ad BC ; At ut AB ad BE , ita triangulum ABC ad triangulum BCE , & ut DB ad BC , ita triangulum DBE ad triangulum BCE : Erit ut ABC ad BCE , ita DBE ad idem BCE *per 1.* Ergo triacula ABC , DBE *per 9.v.* æqualia sunt.

PROP. XVI.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo; illæ quatuor rectæ proportionales erunt.



Sint quatuor rectæ proportionales A ad B ut C ad D: dico rectangulum sub maxima & minima, quæ extremæ sunt C, B, comprehensum; æquale esse rectangulo sub intermedijs A & D comprehenso. Quia est A ad B ut C ad D, anguli vero recti sunt, ergo æquales *per 10. ax. 1.* erunt latera circa æquales angulos reciproca; quare rectangula A D, C B æqualia erunt *per 14.* Deinde si rectangula æqualia fuerint, habebunt etiam latera reciproca *per eandem.*

PROP. XVII.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum, æquale fuerit ei, quod à media describitur, quadrato; illæ tres rectæ proportionales erunt.

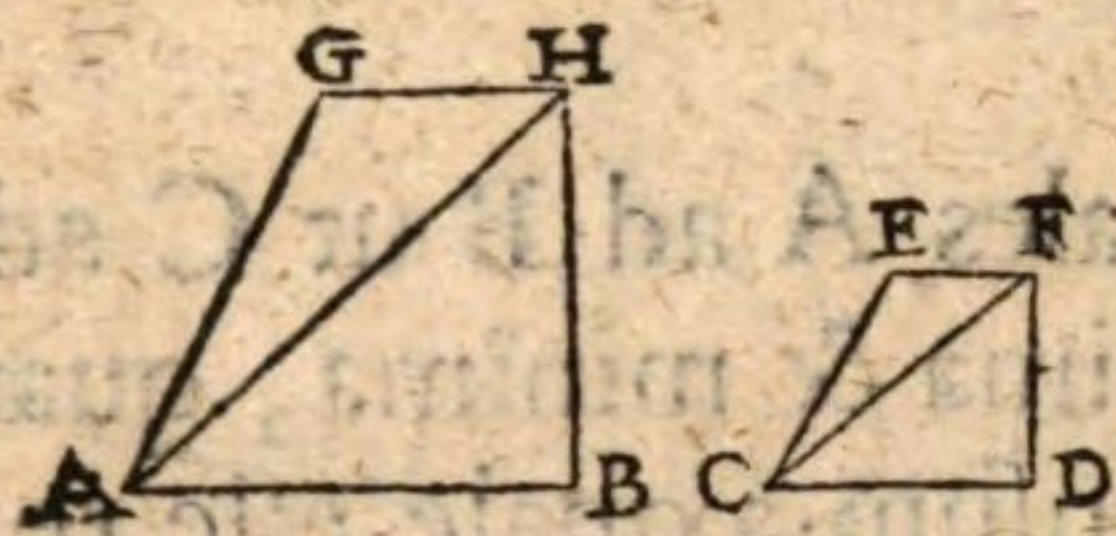


Sint tres proportionales A ad B, ut B ad D. Dico rectangulum ex A & D factum, æquale esse quadrato ex B facto. Quia enim C æqualis B est, erit A ad B ut C ad D, & quatuor rectæ A, B, C, D, proportionales sunt. Sed *per 16.* rectangulum extremarum, æquale est rectangulo intermediarum quod quadratum

tum est; ergo B & C rectæ æquales. Et *per eandem* si AD rectangulum æquale BC rectangulo fuerit, rectæ $ABCD$ proportionales erunt. Sed B & C æquales sunt. Ergo A ad B est ut B ad D .

PROP. XVIII.

A data recta, dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.



Super data recta AB , rectilineum describatur, dato rectilineo $CDFE$ simile, similiterque positum. Resolvatur primum rectilineum datum in triangula $EF C$, $F C D$, per rectam $F C$. Puncto A rectæ AB , *per 23.1.* ponatur angulus HAB , $F C D$ æqualis; & ad B ponatur ABH , æqualis D . ergo AHB , erit CFD angulo æqualis *per 32.1.* Triangulum itaque ABH , triangulo $CD F$ æquiangulum erit, & simile, & ut AH ad CF ita AB ad CD *per 4.* Super AH , describatur quoque triangulum GHA , æquiangulum $EF C$ triangulo. Quia ergo duo anguli AHG , *gab*, duobus angulis CFE , *ecf*, æquales sunt; totus angulus BAG toti angulo DCE æqualis erit; Sic & totus BHG toti $D FE$, ut & G & E , B & D . Erit ergo CF ad AH ut EC ad GA . Sed CF ad AH est ut FE ad HG . ergo EC ad GA erit ut FE ad HG , circum æquales angulos. Eadem rationis reliquorum laterum demonstratio est. Totum ergo rectilineum $ABHG$, toti rectilineo $CDFE$, simile erit, & super datam AB similiter descriptum.

PROP. XIX.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

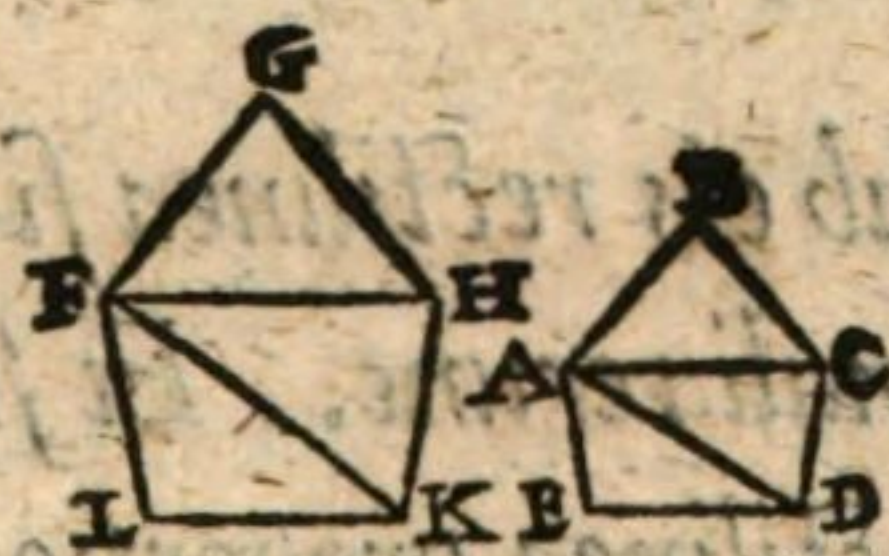
Sint triangula Similia ABC maius, DEF minus. Erunt ergo latera



latera circū æquales angulos [qui sunt $B, E : C, F : A, D :$] proportionalia *per* 4. abscindatur deinde à BC , rectis BC, EF tertia proportionalis BG *per* 11. & ducatur AG . Quare cum triangulorum ABG, DEF latera circa B, E angulos æquales reciproca sint: inter se æqualia erunt, *per* 15. & propterea ut triangulum ABC ad triangulum DEF , ita triangulum, ABC ad triangulum ABG *per* 7.v. Vt autem triangulum ABC ad triangulum ABG eiusdem altitudinis, ita est basis BC ad BG *per* 1. Ergo ut ABC ad DEF , ita BC ad BG . Atqui ratio BC ad BG , duplicata est rationis BC ad EF , cum tres lineæ BC, EF, BG continuè sint proportionales. Igitur triangulum ABC ad triangulum DEF , rationem habet duplicatam; rationis lateris BC , ad latus EF .

PROP. XX.

Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis: & polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

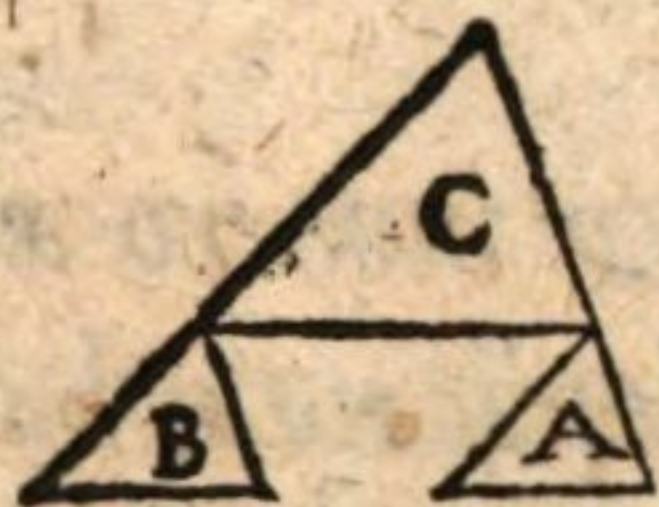


Similia polygona sint $ABCDE, FGHLK$. Quia ergo ex hypothese ABC angulus, FGH angulo æqualis est, & circum æquales angulos latera proportionalia; nempe ut AB ad BC ita FG ad GH . Ducantur rectæ AC, FH , triangula BAC, GFH æquiangularia sunt *per* 6. & GHE , angulo BCA æqualis. Sed GHL angulus, toti BCD æqualis est *per constructionem*: Ablatis itaque GHE, BCA angulis, reliqui FHK, ACD æquales erunt *per* 19.v. Iunctis FK, AD , erit FH , ad HG , ut AC , ad CD circum æquales angulos; & ut GH ad HK , sic BC ad CD . *per* 22. Ergo ut FH ad HK sic AC ad CD . Quia

vero $\angle FHK$ angulus ACD angulo ostensus est æqualis, triangula KFH , DAC similia & æquiangula erunt *per 6*. Et cum totus angulus HKL toti CDE ponatur æqualis eademque forma argumētandi ostendetur, quod FKL angulus ADE angulo æqualis sit, ut reliqui reliquis, etiam FLK , AED , triangula *per 6*. æquiangula erunt: Simile itaque polygona in similia triangula dividuntur, & numero æqualia. Deinde cum singula triangula singulis similia sint triangulis, eademque unius ad alterum ratio est, & partes omnes junctæ toto æquantur, polygonum $FGHKL$, ad polygonum $ABCDE$, duplicatam laterum FG , AB , rationem habebit *per 19*.

PROP. XXI.

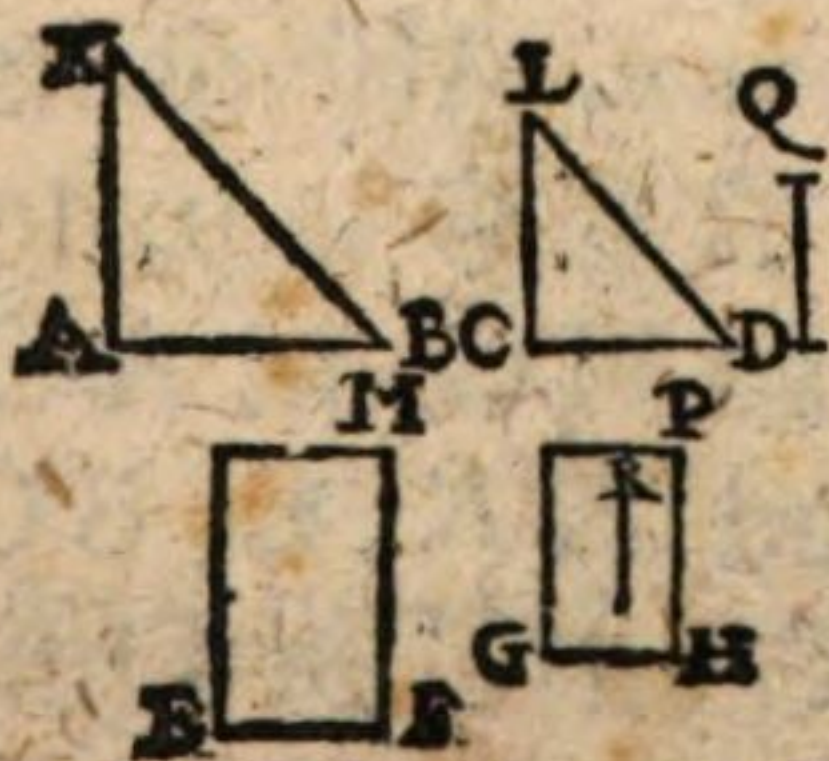
Quæ eidem rectilineo similia sunt, & iter se sunt similia.



Rectilinea A & B , similia sint rectilineo C ; cum ergo illorum anguli, angulis rectilinei C , æquales sint *per 1. defin.* angulos quoque inter se habebunt æquales *per 1. axiom.* & ob eandem causam latera circum æquales angulos proportionalia. Rectilinea ergo A & B similia sunt.

PROP. XXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint: & ab eis rectilinea similia, similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint, ipsæ etiam rectæ proportionales erunt.

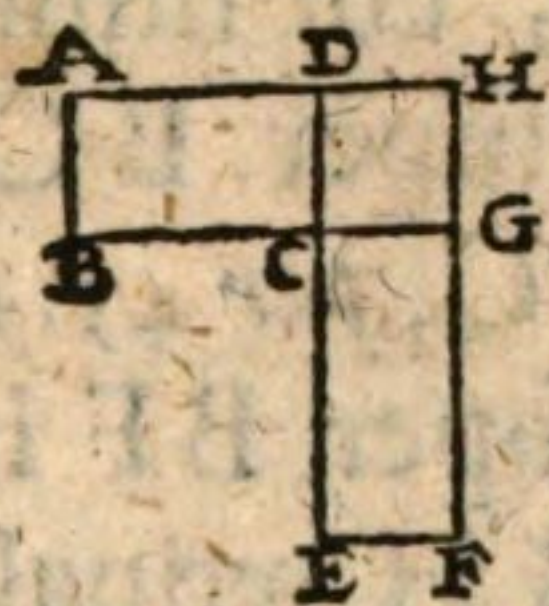


Quatuor rectæ proportionales sint, ut AB ad CD ita EF ad GH ; super AB & CD , constituentur duo quæcumque similia rectilinea, similiterque posita; & super EF , GH , vicissim alia duo. Inveniatur rectis AB , CD ,

AB, CD, tertia proportionalis Q, & rectis EF, GH, tertia R *per* 11. Ergo ut AB ad Q, ita triangulum ABK, ad triangulum CDL [id est in ratione duplicata] & ut EF ad R, ita rectangulum EM ad GP rectangulum *per* 19. Sed ut AB ad CD, ita EF ad GH: Et ut CD ad Q, ita GH ad R; Quare *per* 22.v. ex æquo ut AB ad Q, ita EF ad R, Ergo ut ABK ad CDL, ita EM ad GP *per* 11.v. Deinde sint eadem figuræ proportionales & similes similiterque positæ, dico & rectas super quas descriptæ sunt, proportionales esse: Nam ratio unius ad alteram, est ut rectæ ad rectam duplicata, ut *ex* 19. & 20. colligitur, Ratio ergo laterum eadem erit *per* 7. nempe ut AB ad CD ita EF ad GH. illarum ergo latera proportionalia sunt.

PROP. XXIII.

Æquiangula parallelogramma inter se rationem habent eam quæ ex lateribus componitur.

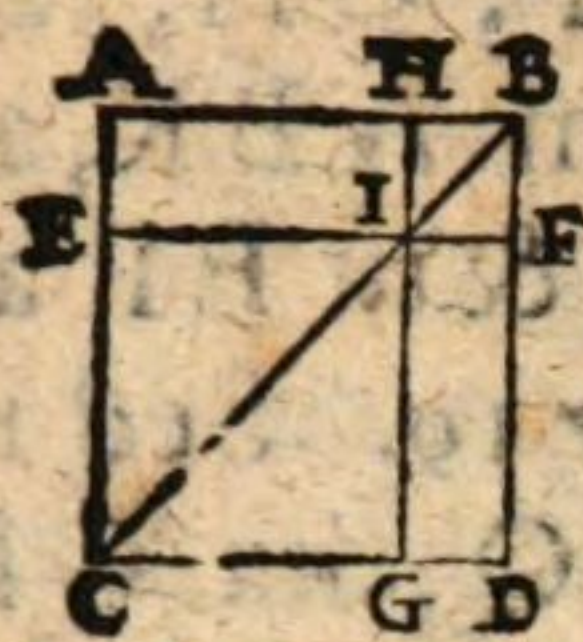


Sint parallelogramma æquiangula AC, CF, angulos BCD, ECG habentia æquales, coniungantur ad angulos æquales ita ut BC, CG, efficiant unam rectam *per conversam* 15.1. producantur deinde AD, FG, donec conveniant in H. Cum ergo *per* 2. sit ut AC ad CH, ita BC ad CG: & ut CH ad CF, ita DC ad CE, Ratio autem AC ad CF, componitur *per* v. *defin.* ex intermedijs AC ad CH & CH ad AF; Componetur quoque eadem ratio AC ad CF, ex rationibus BC ad CG & DC ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales, quod est propositum.

PROP. XXIV.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

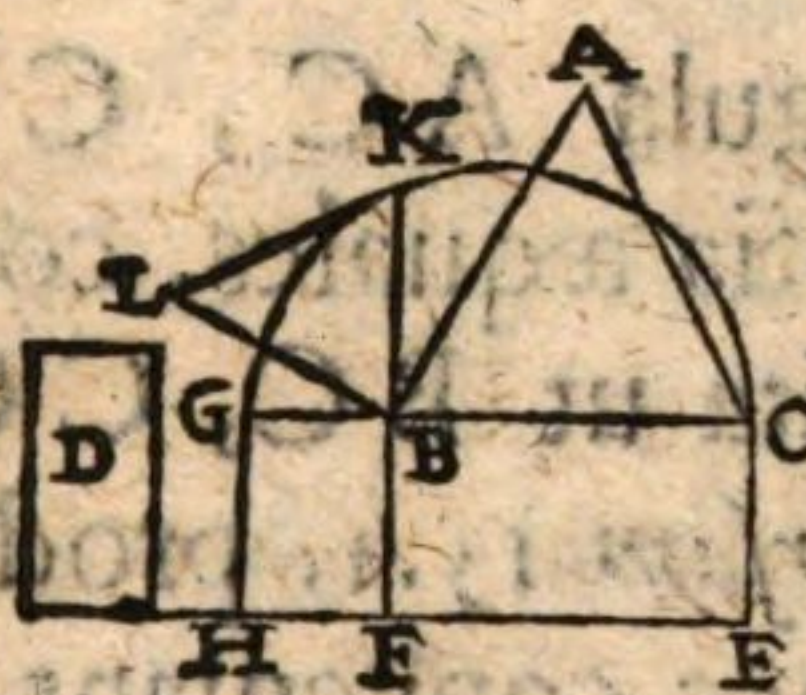
Parallelogrammi DA, diameter CB sit, circa quam parallelogram-



logramma, FH, GE sint, singula angulum
ut B, C, toti communem habentia. Quia ergo
EIF parallela est AB & GIH, CA & CB
per punctum I transit; anguli HBI, BIF, &
EIC, ICG, æquales erunt ut & FBI,
BIH; GIC, ICE, per 29. 1. Et quatuor
triangula æquiangula erunt, & per consequens latera habe-
bunt proportionalia per 4. Vt ergo BH ad HI, ita IE ad
EC, & ut BF ad FI, ita IG ad GC. Proposita ergo pa-
rallelogramma æquiangula, similia, similiterque posita sunt
inter se & cum toto.

PROP. XXV.

*Dato rectilineo simile, similiterque positum, & alteri
dato æquale constituere.*

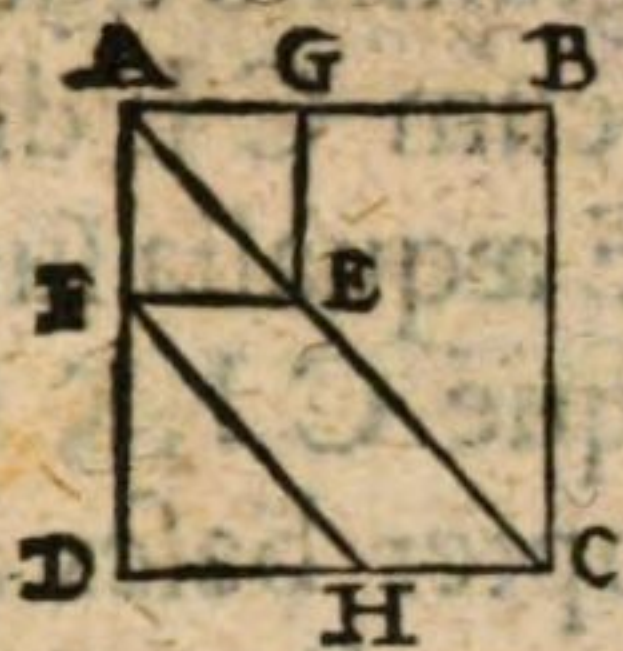


Sit datum rectilineum ABC, cui simile
ponendum, æquale vero D, super BC,
fiat rectangulū BE æquae ABC, per 45. 1.
extendatur CB versus G & super BF in
angulo FBG, rectangulum BH æquale
D describatur; inter GB, BC mediapro-
portionalis sit BK per 13. super qua describatur KLB, simile
ABC per 18. Iam ut CB ad BK ita BK ad BG, & ut ABC
ad KLB, ita CB ad BG in ratione duplicata per 19. & 20.
Sed ut CB ad BG, ita rectangulum EB, [five ABC æquale]
ad BH rectangulum per 1. Triangulum igitur KLB rectan-
gulo BH, [five D suo æquali] per 14. v. æquale est.

PROP. XXVI.

*Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile
toti, &*

toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



Ex parallelogrammo BD, ablatum sit GF, simile ei, similiterque positum, habens A communem angulum. Dico diametrum AE lineam unam rectam esse cum EC. Æquibisecetur DC in H & DA in F; ducatur FH, quæ parallela erit rectæ AC, [nam trianguli FHD latera, proportionalia sunt lateribus trianguli ADC, & per consequens æquiangula sunt per 5.] ergo cum EHD angulus, ACD angulo æqualis sit, & HFD, angulo CAD, lineæ AE, EC una recta AC erunt, quæ parallela FH per 28. & 29. i. ablatum ergo parallelogrammum circum eandem cum toto consistit diametrum.

PROP. XXVII.

Omniū parallelogrammorum secundum eandem rectam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis, ei quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.



Detur recta AB, æquibisecta in C, constituatur quodlibet parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. si compleatur totum parallelogrammum BH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & simile existens defectui CE: dico parallelogrammum AD ad dimidiam AC applicatum, deficiensq; parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quæ secundum AB rectam applicantur, deficiuntq; parallelogrammis similibus similiterq; positis

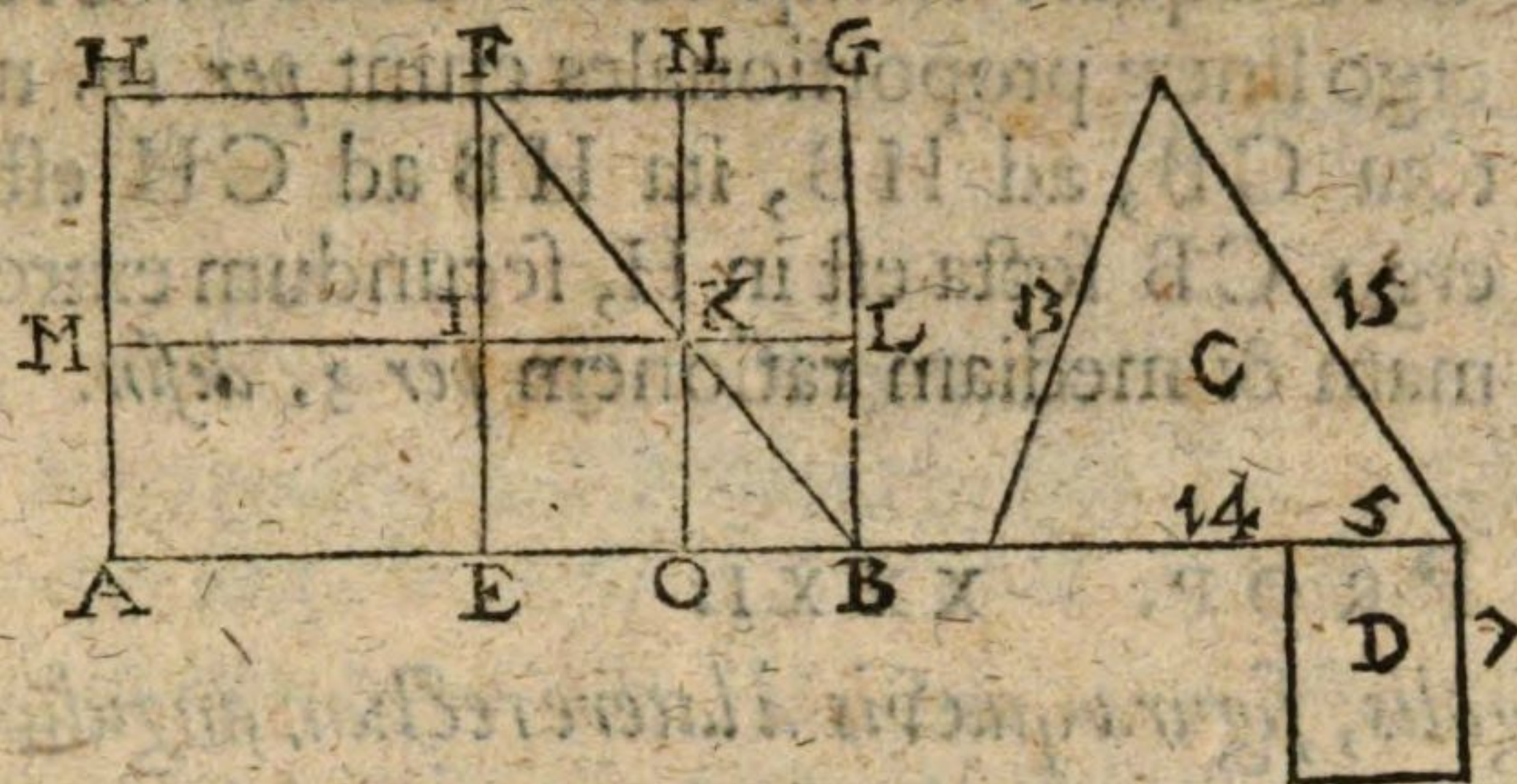
positis ipsi CE , sumpto enim puncto G utcunque in diametro BD , & ductis per G , rectis FGI , kgl ; quæ sint parallelæ rectis AB , be : Erit parallelogrammum FK , secundum rectam AB applicatum deficiens parallelogrammo quod ipsi CE simile est *per* 24. cum sit circa eandem cum CE diametrum. Quoniam vero complementa CE , GE æqualia sunt *per* 43.1. si addatur commune KI , erunt quoque CI , KE , æqualia. Est autem CI æquale ipsi CF propter bases æquales AC , CB , *per* 36.1. Igitur & CF , KE , æqualia erunt, additoq; communi CG , æqualia erunt AG & gnomon LBM : quo, cum CE maior sit, erit quoque AD , æquale existens ipsi CE *per* 36.1. maius quam parallelogrammum AG eodem parallelogrammo DG : Eodemq; modo ostendetur AD , maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB applicantur, ut punctum G sit inter puncta B & D , hoc est quæ occupant maiorem lineam semisse AC , habentq; maiorem altitudinem quam AD , dummodo defectus similes sint ipsi CE . Omnium itaque parallelogrammorum, &c.

PROP. XXVIII.

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri rectilineo dato. Oportet autem datū rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo quod ad dimidiam applicatur, cum similes sint defectus, & eius quod à demidia describitur & eius cui simile deesse debet.

Data recta AB sit, cui applicandum sit parallelogrammum, rectilineo C æquale, deficiens parallelogrammo, dato alteri parallelogrammo D simili. Itaque super dimidiam EB , parallelogrammum EG , simile D collocetur *per* 18. perficiaturque AG , & FB ducatur. Si C parallelogrammo AF [sive EG] æquale fuerit, factū est quod iubebatur. Si minus fuerit, certo spatio supposito, quod ad similem figuram, D parallelo-

grammo

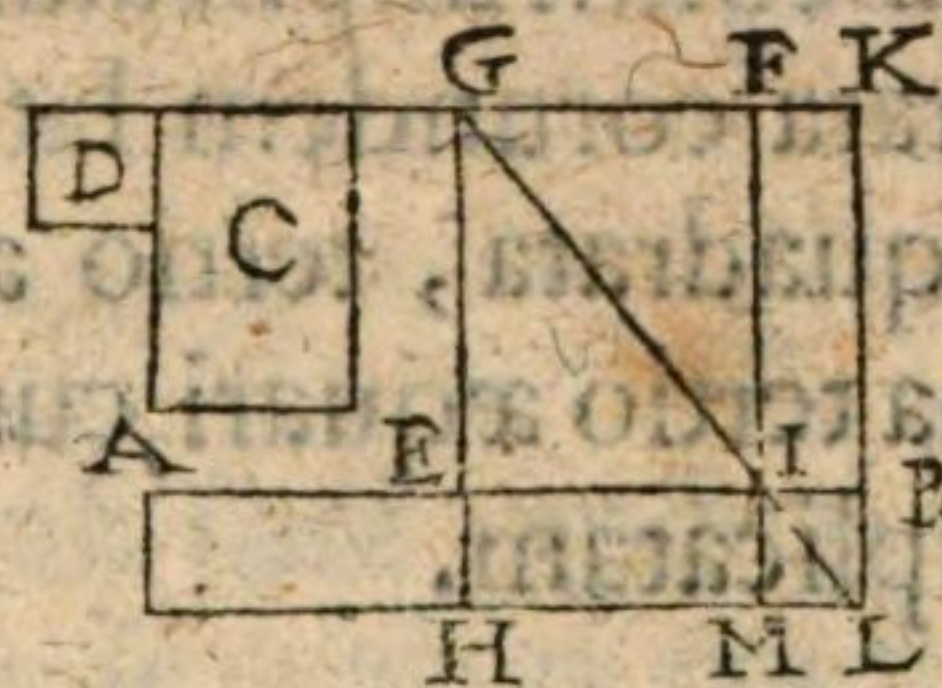


grāmo reducimus
per 25. sitq; IN,
quæ circa diame-
triū FB erit per 26.
Quia ergo per præ-
cedentem osten-
sum est AK mi-
nus esse AF, paral-
lelogrammo IN.

Est autem rectilineum C quam AF, minus, ex *hypothesi* eodem parallelogrammo IN. AK itaque C æquale erit per 7. & 11. & deficiet ab AB, spatio OL simili EG five D parallelogrammo.

PROP. XXIX.

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

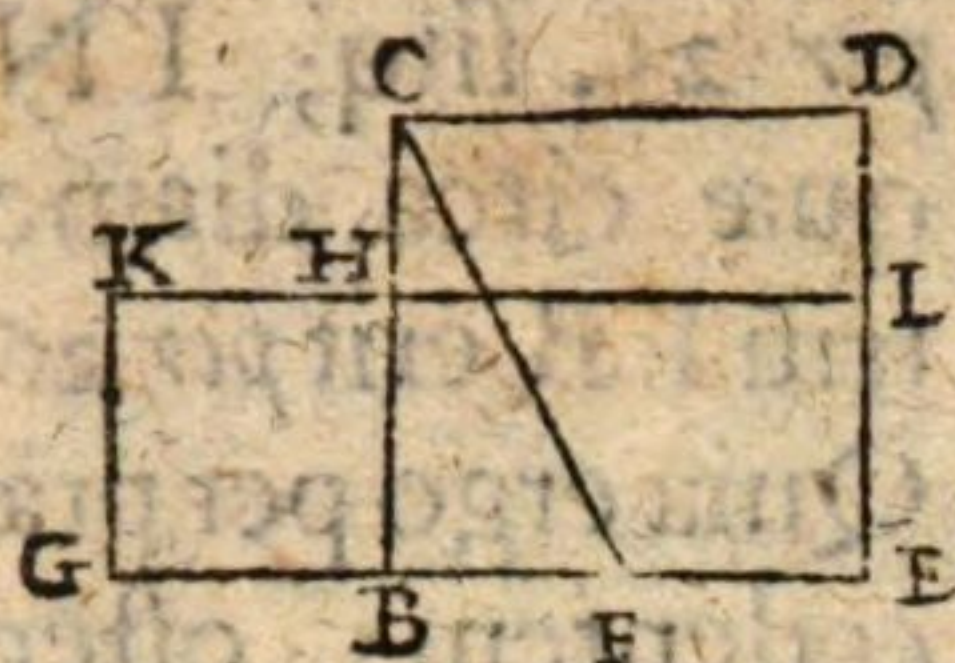


Data recta AI æquibisecetur in E, figura rectilinea applicanda C sit, & parallelogrammum cui excessus similis erit D sit. Iam sit EF similis D, & in angulo G describatur parallelogrammum æquale EF & C, & simile EF five D, per 25. & sit HK. Evidens est quod cōmuni EF ablato, gnomon FLE æqualis sit C. si ergo ex dimidio reliquo factum sit parallelogrammum HA, parallelogrammum AL æquale erit gnomoni FLE & per consequens C, & excedet rectam AI parallelogrammo BM, quod simile est EF five D.

PROP. XXX.

Propositam rectam terminatam, extrema ac media ratione secare.

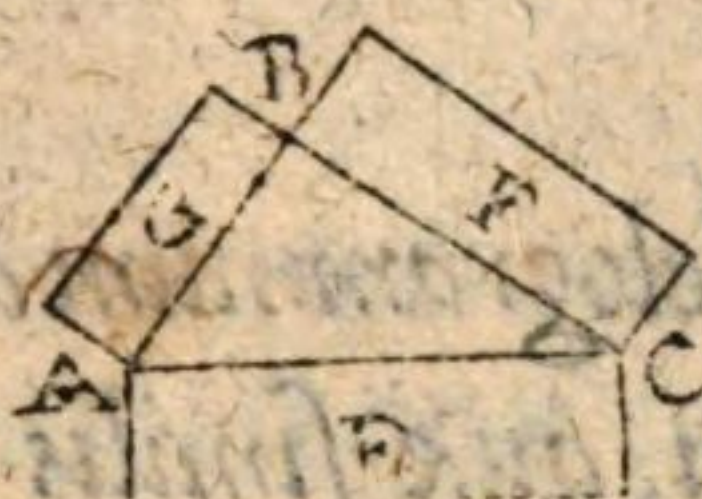
Secetur CB in H, ex sententia 11.11. rectangulum sub CB, CH æqua-



CH æquale erit quadrato de HB : Tres ergo lineæ proportionales erunt *per* 17. ut tota CB , ad HB , ita HB ad CH est; ergo CB secta est in H , secundum extremam & mediam rationem *per* 3. *defin.*

PROP. XXXI.

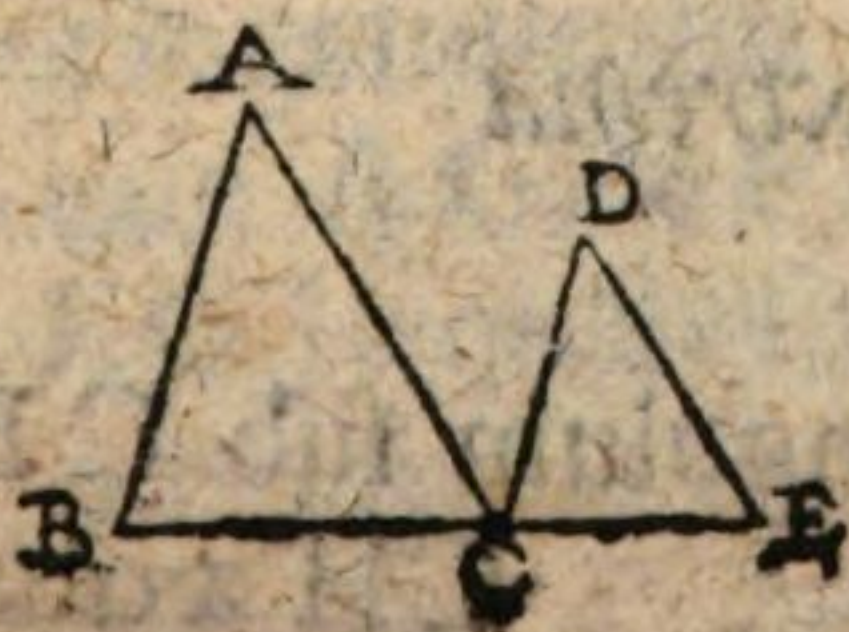
In rectangulis triangulis, figura quævis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positiæ à lateribus rectum angulum continentibus, describuntur.



Sit ABC , triangulum rectangulum, cuius B angulus rectus, Dico quod similia omnia póllygona, similiterque super latera rectum angulum continentia descripta ut hic AGB , CFB , æqualia sint polygono AEC , à latere rectum angulum subtendente descripto. Quoniam póllygona similia sunt æquiangula, rationem habebunt duplicatam suorum laterum, quemadmodum & quadrata eorundem laterum *per* 19. & 20. Constat ergo ut duo quadrata, tertio æquantur *per* 47.1, ita quoque duo polygona tertio æquari, cum & hæc ut illa laterum rationem servant duplicatam.

PROP. XXXII.

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum unum angulum composita fuerint, ita ut homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

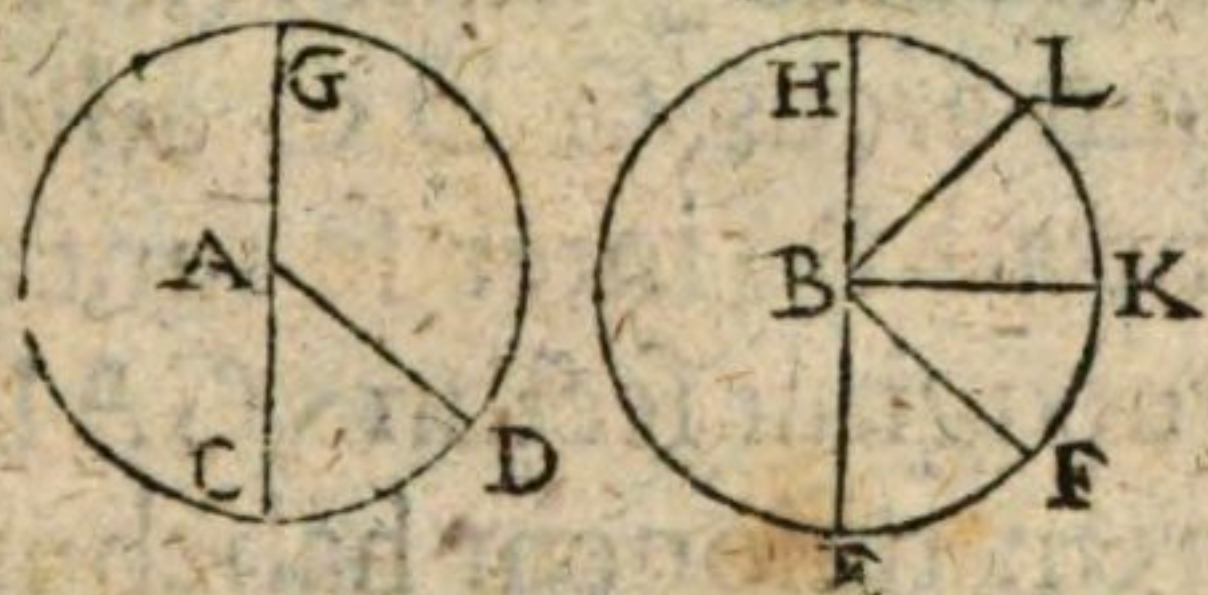


Duo triangula componantur ut efficiant angulum ACD ita ut latera homologa AB , DC , & AC , DE inter se sint parallela: Erit ergo A alterno ACD æqualis &

lis & D eidem ACD *per* 29.1. quare A & D inter se æquales. Circū hos æquales angulos, latera proportionalia sunt *ex hypothesi*; erunt inter se æquiangula, habebuntq; æquales angulos B & DCE *per* 6. Æqualibus A, ACD, additis, duo anguli B & A duobus DCE, ACD hoc est ACE æquales erunt. Rur-
sus communi ACB addito, fient tres anguli trianguli ABC duobus angulis ACE, ACB æquales. Sed illi tres æqua-
les sunt duobus rectis *per* 32.1. Ergo & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales, atque idcirco BC, CE *per* 14. unam rectam constituent.

PROP. XXXIII.

*In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum ipsis peripheriis, quibus, insistant, sive ad centra sive ad peripherias constituti insistant: insuper vero & secto-
res, quippe qui ad centra consistunt.*



Superius *propositione* 27. III. osten-
sum est, quod qui in circulis æqua-
libus anguli æqualibus peripherijs
insistant, æquales sint: Iam vero si
qui in æqualibus circulis inæquales
anguli sunt eandem rationem non servant, quam peripheriæ
inter se quibus tanquam basibus insistant; duo inæquales an-
guli ponantur, CAD maior, EBF minor qui semirectus
sit. Arcus CD maiorem rationem habeat ad EF arcum,
quam CAD angulus ad EBF angulum, *per eandem hypo-*
thesin, arcus GD maior, ad CD minorem, maiorem ratio-
nem habebit quam GAD angulus ad HBF: & coniungen-
do, duo arcus [hoc est dimidium circumferentiæ] maiorem
rationem habebunt ad EF arcum, quam duo anguli GAD,
& DAC, [hoc est duo recti] ad angulum EBF. Fiat
KBF angulus, KBE angulo æqualis, & KBL, LBH, ei-
dem æquales. Ergo *per* 26. III. arcus FK, KL, LH, æqua-
les sunt & quatuor anguli duobus rectis æquales sunt. Evi-

dens est, quod dimidium circumferentia GDC , maiorem rationem habet ad dimidium circumferentiae $HLKFE$, quam duo recti anguli ad duos rectos, quod falsum est & contra hypothesin; ponebantur enim circuli aequales. Similiter demonstratur quod arcus CD non habeat rationem minorem ad EF arcum, qua CAD angulus ad EBF angulum: quare aequalis est. Quod vero angulos attinet, qui ad circumferentiam dimidij sunt angulorum ad centra, eadem est dimidij ad dimidium ratio, quae totius ad totum. Et quia sectorum aequalium anguli ad centra aequales sunt & bases basibus *per 4. I. & 28. III.* lineae rectae aequales, aequales circumferentias auferunt: Sectores vero aequales eandem habent rationem quam Arcus. Si inaequales fuerint, ponatur [si fieri potest] CAD maior sector minorem rationem habere ad EBF minorem sectorem, quam CD arcus ad EF arcum, *per eandem ergo hypothesin* GDC sector; minorem rationem habebit ad CAD minorem sectorem eiusdem circuli, quam GD arcus ad DC arcum, & per consequens toti duo sectores [hoc est semicirculus] minorem rationem habent ad sectorem EBF quam arcus GDC ad arcum EF . Iam quatuor anguli qui sunt ad B , inter se sunt aequales, & eorum arcus *per hypothesin*. Duo igitur sectores GAD , DAC [hoc est semicirculus] minorem rationem habebunt ad quatuor sectores alterius circuli B [qui semicirculum efficiunt] quam dimidium circumferentiae ad dimidium circumferentiae eiusdem circuli, quod falsum est, supposito circulos aequales esse. Similiter demonstratur quod maior sector non habeat maiorem rationem ad minorem sectorem, quam arcus ad arcum. Eadem ergo est unius ad alterum ratio quae arcus ad arcum.

FINIS GEOMETRIAE EVCLIDIS.

Dibvadius, Christoph,

In Geometriam Euclidis ... demonstratio linealis

Arnhemium 1623

4 A.gr.b. 637#Beibd.1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10215858-9